

Autoreferat

Piotr Kokocki

Spis treści

1	Dane osobowe	2
2	Posiadane dyplomy i stopnie naukowe	2
3	Zatrudnienie w jednostkach naukowych	2
4	Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego	2
4.1	Wstęp oraz motywacja fizyczna	3
4.1.1	Równanie Painlevé II	5
4.1.2	Problem Riemanna-Hilberta	6
4.2	Główne wyniki	9
4.2.1	Wzory całkowe dla rozwiązań Ablowitza-Segura: artykuł H1	9
4.2.2	Osobliwości spiralne dla potoku geometrycznego: artykuł H2	13
4.2.3	Równanie mKdV ze szczególnymi warunkami początkowymi: artykuł H3	16
4.2.4	Spirale logarytmiczne w rozwiązaniach równania Eulera: artykuł H4	18
4.2.5	Rozwiązania niesymetryczne dla układu dyskretnego: artykuł H5	21
5	Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze	23
5.1	Publikacje nie uwzględnione w osiągnięciu habilitacyjnym	23
5.1.1	Asymptotyka rozwiązań równania Painlevé II: praca S13	24
5.1.2	Liniowa niestabilności spiral symetrycznych: praca S12	24
5.1.3	Równania eliptyczne z potencjałem typu Kato-Rellicha: praca S11	25
5.1.4	Zbiory niezmiennicze dla układów równań w rezonansie: praca S10	26
5.1.5	Dynamika równań autonomicznych w rezonansie: prace S5, S6, S9	26
5.1.6	Zagadnienia okresowe dla równań w rezonansie: prace S3, S4, S7	27
5.1.7	Ogólna zasada uśredniania dla równań ewolucyjnych: prace S1, S2, S8	29
5.2	Granty i projekty badawcze	30
5.3	Nagrody i wyróżnienia	30
5.4	Opieka naukowa nad młodymi matematykami	30
5.5	Inna działalność	30
6	Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni lub instytucji naukowej	31
7	Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę	31
7.1	Działalność dydaktyczna	31
7.2	Działalność organizacyjna	31

1 Dane osobowe

Imię i nazwisko: Piotr Kokocki
Adres: Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń
E-mail: pkokocki@mat.umk.pl

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

27.06.2012 **Doktor nauk matematycznych** (z wyróżnieniem) Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Rozprawa doktorska: *Dynamika nieliniowych równań ewolucyjnych w rezonansie*,
promotor: prof. dr hab. Wojciech Kryszewski, kopromotor: dr hab. Aleksander Ćwiszewski
27.06.2009 **Magister matematyki** Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń
Praca magisterska: *Zagadnienia okresowe dla nieliniowych równań ewolucyjnych*,
promotor: dr hab. Aleksander Ćwiszewski

3 Zatrudnienie w jednostkach naukowych

01.10.2012 – teraz, **Adiunkt**, Katedra Nieliniowej Analizy Matematycznej,
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń
01.10.2014 – 30.09.2015, **Postdok**, Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao, Hiszpania

4 Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego

Jako osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 219 ust1. 1 pkt. 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, wskazuję cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod wspólnym tytułem

Rozwiązania samopodobne w modelach związanych z dwuwymiarowym równaniem Eulera

Wykaz artykułów składających się na osiągnięcie naukowe:

- [H1] P. Kokocki, *Total integrals of Ablowitz-Segur solutions for the inhomogeneous Painlevé II equation*, Studies in Applied Mathematics, vol. 144 (2020), no. 4, 504–547.
- [H2] K. Dunst, P. Kokocki, *Double spiral singularities for a flow related with the 2D Euler equation*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 53 (2021), no. 4, 4727–4743.
- [H3] K. Dunst, P. Kokocki, *On global solutions of defocusing mKdV equation with specific initial data of critical regularity*, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 417 (2021), art. no. 132810.
- [H4] T. Cieślak, P. Kokocki, W. Ożański, *Well-posedness of logarithmic spiral vortex sheets*, Journal of Differential Equations, vol. 389 (2024), 508–539.
- [H5] T. Cieślak, P. Kokocki, W. Ożański, *Existence of nonsymmetric logarithmic spiral vortex sheet solutions to the 2D Euler equations*, Scuola Normale Superiore, Annali di Scienze, https://doi.org/10.2422/2036-2145.202208_003

4.1 Wstęp oraz motywacja fizyczna

Przedstawiony cykl prac poświęcony jest badaniu istnienia i matematycznej analizie rozwiązań samopodobnych w wybranych zagadnieniach wywodzących się z mechaniki płynów nielepkich i nieściśliwych. Po odpowiednim przeskalowaniu, rozważane przez nas rozwiązania przyjmują postać funkcji profilowej, która jest niezależna od czasu. W ten sposób zmniejszamy liczbę niezależnych zmiennych w równaniu różniczkowym, co umożliwia badanie skomplikowanych modeli przy użyciu prostszych struktur matematycznych. Rozwiązania samopodobne umożliwiają także wyodrębnienie istotnych cech dynamiki równania takich jak powstawanie osobliwości na odpowiednich skalach czasowych czy stabilność rozwiązań, co ma zastosowanie w różnych kontekstach naukowych i inżynierskich. Podstawą naszych rozważań jest dwuwymiarowe równanie Eulera

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div} v = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (4.1)$$

gdzie v oznacza pole prędkości, zaś p jest funkcją ciśnienia. Równanie to opisuje ewolucję płynów nielepkich i nieściśliwych o stałej gęstości, w których ruch cząstek jest generowany przez ciśnienie wewnętrzne cieczy. Jeśli $\omega := \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ jest wirowością pola v , to spełnione jest równanie

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0,$$

w którym pole prędkości v jest powiązane z polem skalarnym ω za pomocą prawa Biota-Savarta

$$v = K * \omega, \quad (4.2)$$

gdzie K jest jądrem danym wzorem

$$K(x) := \frac{1}{2\pi} \frac{(-x_2, x_1)}{|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Wzbogacając równanie Eulera o dodatkowe założenia na dotyczące struktury badanej cieczy możemy rozważać bardziej złożone modele opisujące przepływy, których wirowość skoncentrowana jest na rozmaitości jednowymiarowej lub na obszarze ograniczonym w \mathbb{R}^2 . Kolejnym zagadnieniem jest badanie zachowanie interfejsu między mniej i bardziej gęstą warstwą cieczy w stabilnie rozwarstwowanym płynie, który jest układem powszechnie występującym w środowisku naturalnym. Wymienione problemy mają zazwyczaj duży poziom skomplikowania dlatego w niektórych przypadkach stosuje się podejście aproksymacyjne, w którym w sposób formalny przybliżamy dane zagadnienie za pomocą równań różniczkowych, które możemy rozważać za pomocą dostępnych metod badawczych. Prace wchodzące w skład rozprawy poświęcone są badaniu istnienia oraz analizie rozwiązań samopodobnych występujących w wyżej wymienionych modelach i możemy podzielić je na dwie grupy. Do pierwszej z nich zaliczamy [H1], [H2] oraz [H3], gdzie zajmujemy się zagadnieniami, w których funkcja profilowa tworząca rozwiązanie samopodobne konstruowana jest jako odpowiednie rozwiązanie równania Painlevé II. Prace te powstały w wyniku realizacji projektu badawczego, który został zainspirowany moim rocznym pobytem w Basque Center for Applied Mathematics. Drugą grupę tworzą prace [H4] oraz [H5], gdzie badamy istnienie słabych rozwiązań samopodobnych dla równania Euler o wirowości skoncentrowanej na rodzinie spiral logarytmicznych. Artykuły te są wynikiem bieżącej współpracy z Tomaszem Cieślakiem (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk) oraz Wojciechem Ożańskim (Florida State University).

W pracy [H1] zajmujemy się analizą rozwiązań równania Painlevé II

$$u''(x) = xu(x) + 2u^3(x) - \alpha, \quad x \in \mathbb{C}, \quad (4.3)$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$ jest pewną stałą. Dowodzimy w niej wzorów wyrażających całki Cauchy'ego dla rzeczywistych i urojonych rozwiązań Ablowitza-Segura w zależności od odpowiadających im warunków początkowych Stokesa. Wykorzystane w niej podejście polega na analizie stowarzyszonego problemu Riemanna-Hilberta poprzez deformacje jego konturu oraz zastosowanie metody najszybszego spadku [24]. Istotnym elementem jest również znajdowanie wzorów jawnych lokalnych rozwiązań aproksymujących zdeformowanego problemu Riemanna-Hilberta w otoczeniach wyróżnionych punktów należących do jego konturu. W szczególności, jednym z wyników pracy jest konstrukcja takiego rozwiązania w otoczeniu początku układu współrzędnych, które możemy wyrazić za pomocą funkcji Bessela. Dzięki temu mamy możliwość uzyskania interesujących nas wzorów całkowych jak również rygorystycznego ulepszenia istniejących rozwinięć asymptotycznych dla rozwiązań Ablowitza-Segura. Wyniki pracy [H1] opisane są szczegółowo w Sekcji 4.2.1.

Praca [H2] poświęcona jest następującemu potokowi geometrycznemu

$$\begin{cases} z_t = -z_{xxx} + \frac{3}{2}(z_x)^* z_{xx}^2, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ |z_x|^2 = 1, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.4)$$

gdzie $z(t, x)$ jest zależną od czasu rodziną krzywych gładkich zawartych w płaszczyźnie zespolonej, zaś $*$ oznacza sprzężenie. Dowodzimy, że dowolna podwójna spirala logarymiczna jest osobliwością rozwijaną w skończonym czasie przed gładkie samopodobne rozwiązanie potoku (4.4). Otrzymany rezultat rozwiązuje hipotezę przedstawioną w pracy [66]. Kluczowym elementem dowodu jest znalezienie funkcji profilowej jako odpowiedniego urojonego rozwiązania Ablowitza-Segura równania Painlevé II, do czego posłużą nam wzory całkowe, które otrzymaliśmy w [H1]. Wyniki z pracy [H2] opisane są szczegółowo w Sekcji 4.2.2.

Potok geometrycznych (4.4) został wprowadzony w pracy [34] jako lokalna aproksymacja dynamiki obszarów wirowych, czyli rozwiązań równania Eulera (4.1), dla których wirowość ma postać funkcji charakterystycznej

$$\omega(t) := \omega_0 \mathbf{1}_{\Omega(t)}, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

gdzie $\omega_0 \in \mathbb{R}$, zaś $\{\Omega(t)\}_{t \geq 0}$ jest rodziną obszarów ograniczonych. Stosując prawo Biota-Savarta (4.2), można pokazać, że ewolucję brzegu $\{\partial\Omega(t)\}_{t \geq 0}$ opisuje nielocalne równanie

$$X_t(t, y) = -\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_y(t, y') \ln |X(t, y) - X(t, y')| dy, \quad t > 0, 0 \leq y \leq 2\pi, \quad (4.6)$$

gdzie $X(t)$ jest parametryzacją zbioru $\partial\Omega(t)$ w notacji zespolonej (zob. [58, Rozdział 8], [80]). Formalna aproksymacja potoku (4.6) zaproponowana w [34], polega na obcięciu całki stojącej po prawej stronie tego równania do pewnego otoczenia punktu $y \in [0, 2\pi]$ oraz rozwinięciu wyrazu $X(t, y')$ w szereg Taylora. Ma to na celu przedstawienie potoku (4.6) jako formalnej sumy przeliczalnej ilości potoków lokalnych określonych na zbiorze liczb rzeczywistych, z których najbardziej znaczącym okazuje się być potok geometryczny (4.4). Metoda ta nazywana jest w literaturze *lokalną aproksymacją indukcji* dla prawa Biota-Savarta i jest często stosowana do badań dynamiki struktur wirowych w płynach turbulentnych. Dokładny opis tej procedury wraz z obliczeniami prowadzącymi do otrzymania potoku (4.4) zawarte są również w [47, Sekcja 1].

W pracy [H3] zajmujemy się zmodyfikowanym równaniem Kortewega-de Vriesa

$$k_t + k_{xxx} - \frac{3}{2}k^2 k_x = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

z ujemną nieliniowością. Dowodzimy, że dowolna dystrybucja będąca kombinacją liniową delty Diraca i wartości głównej Cauchy’ego jest warunkiem początkowym gładkiego samopodobnego rozwiązania równania (4.7), którego funkcja profilowa jest rzeczywistym rozwiązaniem Ablowitza-Segura równania Painlevé II. Skonstruowane przez nas rozwiązanie jest początkowo zlokalizowane w zerze, lecz ewoluując w czasie, przechodzi w fale o dużych długościach i małych amplitudach. W dowodzie używamy między innymi wyników z pracy [H1], czyli wzorów wyrażających całki Cauchy’ego rozwiązań Ablowitza-Segura w zależności od współczynników Stokesa, jak również uzyskanych rozwiązań aproksymujących dla zdeformowanego problemu Riemanna-Hilberta. Otrzymane wyniki odnoszą się do niedawnej pracy [16], gdzie istnienie rozwiązań samopodobnych zostało pokazane przy założeniu, że współczynniki kombinacji liniowej są dostatecznie bliskie zeru (zob. również [37]). Wyniki z pracy [H3] zostały szczegółowo opisane w Sekcji 4.2.3.

Równanie (4.7) pojawia się w modelu [50] opisującym dynamikę interfejsu między cieczami w stabilnie rozwarstwowanym płynie, w którym ciecz gęstsza znajduje się na dnie zbiornika i stabilizuje się w tej pozycji powodu różnic gęstości. Takie struktury często powstają w oceanach w wyniku separacji warstw wody o różnej temperaturze lub zasoleniu. Narzędziem służącym do modelowania interfejsu między tymi warstwami jest równanie Eulera dla bezwirowego płynu wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi określonymi na granicach między cieczami i między płynem a atmosferą. Chodź układy tego typu są skomplikowane i trudne do badania, to dokonując formalnej aproksymacji (zob. [50]), możliwe jest uproszczenie tych zagadnień i uzyskanie przybliżonej dynamiki amplitudy interfejsu w postaci równania (4.7) (zob. również [53], [65]).

W pracy [H4] zajmujemy się rozwiązaniami równania Eulera (4.1), których wirowość jest miarą zadaną wzorem

$$\omega(t) := \gamma(t)\delta_{\Sigma(t)}, \quad t > 0, \quad (4.8)$$

gdzie $\Sigma(t)$ jest zależną od czasu rodziną koncentrycznych spiral logarytmicznych oraz $\gamma(t)$ jest odpowiednio dobraną gęstością. Konstruujemy samopodobne pole prędkości o wirowości równej (4.8), o którym dowodzimy, że jest słabym rozwiązaniem równania Eulera na całej płaszczyźnie kartezjańskiej \mathbb{R}^2 wtedy i tylko wtedy, gdy parametry definiujące miarę $\omega(t)$ spełniają pewien nieliniowy układ dyskretny. Jako wniosek otrzymujemy istnienie rozwiązań samopodobnych, których wirowość skoncentrowana jest na symetrycznie rozłożonej rodzinie spiral logarytmicznych. Odnosi się to również do przypadku, gdy interfejs $\Sigma(t)$ jest dobrze znaną z literatury pojedynczą spiralą Prandtla [68], [74]. Kontynuacją tych rozważań jest praca [H5], która poświęcona jest dowodowi istnienia słabych rozwiązań samopodobnych równania Eulera, których wirowość skoncentrowana jest na interfejsie składającym się z niesymetrycznie rozłożonych spiral logarytmicznych. Zastosowana metoda polega na szukaniu rozwiązań nieliniowego układu dyskretnego badanego w pracy [H1]. Traktując ten układ jako problem bifurkacyjny, uzyskujemy gałąź rozwiązań będących parametrami definiującymi poszukiwane samopodobne pole prędkości. Wyniki z prac [H4] oraz [H5] zostaną szczegółowo opisane odpowiednio w Sekcjach 4.2.4 oraz 4.2.5.

4.1.1 Równanie Painlevé II

W pracach [H2] oraz [H3] zajmujemy się zagadnieniami, w których funkcja profilowa rozwiązania samopodobnego spełnia równanie (4.3). Równanie to zostało wprowadzone przez francuskiego matematyka Paula Painlevé w [63] jako drugie z hierarchii sześciu nieliniowych równań różniczkowych, mających mało spotykaną cechę: jedyne ruchome osobliwości jakie posiadają rozwiązania tych równań to bieguny, których położenie zależy jedynie od danych warunków początkowych. Klasyczna teoria istnienia i jednoznaczności mówi nam, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{C}$ oraz punktów $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ istnieje $r > 0$ takie, że równanie (4.3) posiada dokładnie jedno holomorficzne rozwiązanie $u : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że $u(x_0) = u_0$ oraz $u'(x_0) = u_1$ (zob. [36, Twierdzenie A.2]). Ponadto [36, Twierdzenie 2.1] mówi nam, że dowolne rozwiązanie lokalne równania (4.3) przedłuża się do funkcji meromorficznej określonej na całej płaszczyźnie zespolonej, dla której wszystkie bieguny są jednokrotne oraz residuum każdego z nich wynosi 1 albo -1 .

Szczególną rolę w niniejszej rozprawie będą pełniły następujące klasy rozwiązań.

Definicja 4.1. Niech u będzie rozwiązaniem równania Painlevé II (PII) oraz niech S_u będzie zbiorem jego biegunów. Rozwiązanie u będziemy nazywać *urojonym*, jeśli

$$\operatorname{Re} u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus S_u.$$

Ponadto powiemy, że rozwiązanie u jest *rzeczywiste*, jeśli

$$\operatorname{Im} u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus S_u.$$

Wiadomo, że jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $u(x)$ jest rozwiązaniem rzeczywistym równania (4.3), które nie posiada biegunów na prostej rzeczywistej, to funkcja dana wzorem

$$k(t, x) := -2(3t)^{-1/3}u(x(3t)^{-1/3}), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.9)$$

jest samopodobnym rozwiązaniem równania mKdV (4.7) o wartościach rzeczywistych (zob. [1], [4], [23]). Ponadto bezpośredni rachunek pokazuje, że jeśli $\alpha \in i\mathbb{R}$ oraz $u(x)$ jest rozwiązaniem urojonym równania PII, to samopodobna funkcja zespolona

$$z(t, x) := e^{i\beta}t^{1/3}e^{(2\alpha/3)\ln t} \left(\int_0^{xt^{-1/3}} \exp \left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \int_0^y u(z/\sqrt[3]{3}) dz \right) dy + C_{u,\alpha} \right), \quad (4.10)$$

gdzie $\beta \in \mathbb{R}$ oraz $C_{u,\alpha} := -2\sqrt[3]{3}(u_x(0) - u^2(0))/(1 + 2\alpha)$, jest gładkim rozwiązaniem potoku geometrycznego (4.4). Zauważmy, że całki występujące we wzorze (4.10) są poprawnie określone ponieważ, jeśli $\alpha \in i\mathbb{R}$ to dowolne rozwiązanie urojone $u(x)$ nie posiada biegunów na prostej rzeczywistej (zob. [36]).

4.1.2 Problem Riemanna-Hilberta

W tej sekcji przypomnimy podejście służące do badania rozwiązań równania Painlevé II poprzez analizę stowarzyszonego z nim problemu Riemanna-Hilberta (zob. [29], [30], [49]). Załóżmy, że $\alpha \in \mathbb{C}$ jest ustalone oraz $\Sigma := C \cup \rho_+ \cup \rho_- \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_6$ jest konturem w płaszczyźnie zespolonej takim, że $C := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r\}$ dla pewnego $r > 0$, jest okręgiem zorientowanym zgodnie z ruchem wskazówek zegara, $\rho_\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < r, \arg \lambda = \pm \frac{\pi}{2}\}$ są odcinkami wskazującymi na początek układu współrzędnych oraz

$$\gamma_k := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r, \arg \lambda = \pi/6 + (k-1)\pi/3\}, \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

są sześcioma półprostymi zorientowanymi od zera do nieskończoności. Kontur Σ dzieli płaszczyznę zespoloną na obszary Ω_r, Ω_l oraz Ω_k dla $1 \leq k \leq 6$, tak jak to przedstawiono na Rysunku 1. Rozważmy macierze trójkątne

$$S_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_k & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 3, 5 \quad \text{oraz} \quad S_k := \begin{pmatrix} 1 & s_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 2, 4, 6,$$

gdzie parametry s_1, \dots, s_6 , zwane *współczynnikami Stokesa*, spełniają następujące warunki

$$s_{k+3} = -s_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.11)$$

$$s_1 - s_2 + s_3 + s_1 s_2 s_3 = -2 \sin(\pi\alpha). \quad (4.12)$$

Ponadto załóżmy, że σ_1, σ_2 and σ_3 są kolejnymi macierzami Pauliego danymi wzorami

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

zaś E jest macierzą o wyznaczniku równym jeden taką, że spełniona jest następująca równość

$$ES_1S_2S_3 = \sigma_2 M^{-1} E \sigma_2, \quad \text{gdzie } M := -ie^{i\pi(\alpha-\frac{1}{2})\sigma_3} \sigma_2.$$

Problem Riemanna-Hilberta (RH) dla równania PII polega na znalezieniu odwzorowania $\Phi(\lambda) := \Phi(\lambda, x)$ o wartościach w przestrzeni dwuwymiarowych macierzy zespolonych $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ takiego, że spełnione są następujące warunki.

(RH1) Dla dowolnego $k \in \{l, r\}$ oraz $1 \leq k \leq 6$, odwzorowanie $\Phi_k := \Phi|_{\Omega_k}$ jest holomorficzne na zbiorze Ω_k . Ponadto Φ_k posiada ciągle rozszerzenie do domknięcia zbioru Ω_k dla $1 \leq k \leq 6$ oraz $\Phi_k \in C(\overline{\Omega_k^\varepsilon})$ dla $k \in \{l, r\}$ oraz dostatecznie małych $\varepsilon > 0$, gdzie przyjmujemy oznaczenie $\Omega_k^\varepsilon := \Omega_k \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < \varepsilon\}$.

(RH2) Dla dowolnego $\lambda \in \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_6$ spełnione są następujące *warunki skoku*

$$\Phi_{k+1}(\lambda) = \Phi_k(\lambda) S_k, \quad \lambda \in \gamma_k, \quad 1 \leq k \leq 6,$$

gdzie przyjmujemy konwencje $\Phi_7 := \Phi_1$. Ponadto, dla $\lambda \in C$, spełniona jest odpowiadająca temu parametrowi równość

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda) &= \Phi_r(\lambda) E, & \Phi_2(\lambda) &= \Phi_r(\lambda) E S_1, \\ \Phi_3(\lambda) &= \Phi_l(\lambda) \sigma_2 E \sigma_2 S_3^{-1}, & \Phi_4(\lambda) &= \Phi_l(\lambda) \sigma_2 E \sigma_2, \\ \Phi_5(\lambda) &= \Phi_l(\lambda) \sigma_2 E S_1 \sigma_2, & \Phi_6(\lambda) &= \Phi_r(\lambda) E S_6^{-1}, \end{aligned}$$

zaś dla $\lambda \in \rho_\pm$ mamy

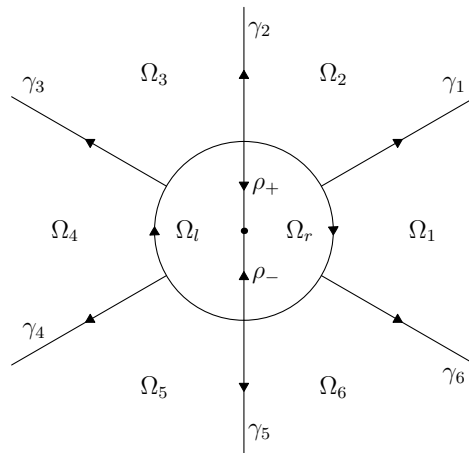
$$\begin{aligned} \Phi_l(\lambda) &= \Phi_r(\lambda) M, & \lambda \in \rho_- \setminus \{0\}, \\ \Phi_r(\lambda) &= \Phi_l(\lambda) \sigma_2 M \sigma_2, & \lambda \in \rho_+ \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

(RH3) Odwzorowanie $\Phi_r(\lambda) \lambda^{-\alpha \sigma_3}$ jest ograniczone dla λ dostatecznie bliskich zero, gdzie gałąź logarytmu w funkcji $\lambda^{-\alpha}$ jest wybrana dowolnie.

(RH4) Odwzorowanie $\Phi(\lambda)$ ma następujące zachowanie asymptotyczne

$$\Phi(\lambda) = (I + O(\lambda^{-1})) e^{-\theta(\lambda, x) \sigma_3}, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

gdzie funkcja fazowa dana jest wzorem $\theta(\lambda, x) := i(\frac{4}{3}\lambda^3 + x\lambda)$.



Rysunek 1: Kontur Σ wraz z podziałem płaszczyzny zespolonej na sześć obszarów. Zadana orientacja pozwala w naturalny sposób zdefiniować lewą (+) oraz prawą (-) stronę konturu, co będzie pomocne w definiowaniu działania macierzy skoku w dalszej części rozprawy.

Wiadomo, że dla dowolnego wyboru współczynników Stokesa (s_1, s_2, s_3) , powyższe zagadnienie posiada jednoznaczne rozwiązanie $\Phi(\lambda, x)$, które jest funkcją meromorficzną ze względu na zmienną x (zob. [25], [29], [30, Rozdział 11], [49], [78], [81]). Niech $X = \{x_k\}_{k \geq 1}$ będzie ciągiem złożonym z jej biegunów. Ważną własnością jest fakt, że funkcja zespolona dana jako granica

$$u(x) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (2\lambda \Phi(\lambda, x) e^{\theta(\lambda, x)\sigma_3})_{12}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus X \quad (4.13)$$

jest rozwiązaniem niejednorodnego równania PII z ustalonym wcześniej współczynnikiem α (zob. [30]). Pozwala to zdefiniować odwzorowanie przyporządkowujące dowolnej trójce Stokesa (s_1, s_2, s_3) odpowiadające jej rozwiązanie równania (4.3). Omawiane podejście dostarcza nam znanego opisu rozwiązań rzeczywistych i urojonych (zob. [30, Rozdział 11]). Mianowicie, dla danego $\alpha \in \mathbb{R}$, współczynniki (s_1, s_2, s_3) wyznaczają rzeczywiste rozwiązanie równania (4.3), jeśli

$$s_3 = \overline{s_1}, \quad s_2 = \overline{s_2}. \quad (4.14)$$

Ponadto zakładając $\alpha \in i\mathbb{R}$ mamy, że współczynniki te definiują jest rozwiązanie urojone, jeśli

$$s_3 = -\overline{s_1}, \quad s_2 = -\overline{s_2}. \quad (4.15)$$

W naszych rozważaniach szczególną rolę będą pełnić rozwiązania odpowiadające następującemu wyborowi warunków początkowych Stokesa

$$s_1 = -\sin(\pi\alpha) - ik, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = -\sin(\pi\alpha) + ik, \quad k, \alpha \in \mathbb{C}, \quad (4.16)$$

które, dla krótkości zapisu, oznaczamy przez $u(\cdot; \alpha, k)$. Spośród nich wyróżniamy *rzeczywiste rozwiązania Ablowitza-Segura* wyznaczone przez

$$\alpha \in (-1/2, 1/2) \quad \text{oraz} \quad k \in (-\cos(\pi\alpha), \cos(\pi\alpha)). \quad (4.17)$$

Nie trudno sprawdzić, że przy tym założeniu współczynniki (4.16) spełniają równości (4.14), zaś rezultaty z [10] oraz [20] pokazują, że odpowiadające im rozwiązania nie posiadają biegunów na osi liczb rzeczywistych. Współczynniki (4.16), dla których

$$\alpha, k \in i\mathbb{R},$$

wyznaczają *urojone rozwiązania Ablowitza-Segura*. Nietrudno zauważyć, że w tej sytuacji spełniony jest warunek (4.15), zaś odpowiadające rozwiązanie $u(\cdot; \alpha, k)$ nie posiada biegunów rzeczywistych ponieważ, jak zaznaczyliśmy w poprzedniej sekcji, fakt ten jest spełniony dla dowolnych rozwiązań urojonych. Zarówno rzeczywiste jak i urojone rozwiązania AS mają na osi rzeczywistej rozwinięcie asymptotyczne (zob. [24], [48])

$$u(x; \alpha, k) = B(\alpha; x) + k \text{Ai}(x)(1 + O(x^{-3/4})), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (4.18)$$

gdzie $B(0, x) \equiv 0$ oraz $B(\alpha; x) = \alpha x^{-1} + O(x^{-4})$ gdy $x \rightarrow +\infty$, zaś $\text{Ai}(x)$ jest funkcją Airy'ego daną poprzez następującą całkę oscylacyjną

$$\text{Ai}(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt.$$

Ponadto dla rzeczywistych rozwiązań AS mamy następujące rozwinięcia asymptotyczne

$$u(x; \alpha, k) = \frac{d_R}{(-x)^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} - \frac{3}{4}d_R^2 \ln(-x) + \phi_R\right) + O((-x)^{-1}), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (4.19)$$

gdzie stałe d_R oraz ϕ_R dane są wzorami

$$d_R := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\ln(\cos^2(\pi\alpha) - k^2)}, \quad (4.20)$$

$$\phi_R := -\frac{3}{2}d_R^2 \ln 2 + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2}id_R^2\right) - \frac{\pi}{4} - \arg(-\sin(\pi\alpha) - ki). \quad (4.21)$$

W przypadku rozwiązań urojonych powyższa asymptotyka przyjmuje postać

$$u(x; \alpha, k) = d_I(-x)^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}d_I^2 \ln(-x) + \phi_I\right) + O((-x)^{-1}), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (4.22)$$

gdzie odpowiednie stałe d_I oraz ϕ_I dane są wzorami

$$d_I := \frac{i}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln(\cosh^2(\pi i\alpha) + |k|^2)}, \quad (4.23)$$

$$\phi_I := -\frac{3}{2}d_I^2 \ln 2 + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2}id_I^2\right) - \frac{\pi}{4} - \arg(-ik + i \sinh(\pi i\alpha)). \quad (4.24)$$

Rozwinięcia asymptotyczne (4.19), (4.20), (4.21) oraz (4.22), (4.23), (4.24) zostały formalnie wyznaczone w [1], [59], zaś ich rygorystyczny dowód w przypadku jednorodnym $\alpha = 0$ został przeprowadzony różnymi metodami w pracach [11], [42], [24]. W szczególności podejście zaproponowane przez Deift-Zhou w [24] polega na zastosowaniu metody najszybszego spadku do problemu RH stowarzyszonego z równaniem PII. Ta sama metoda została później z powodzeniem wykorzystana w [20] do dowodu powyższych rozwinięć asymptotycznych również w przypadku równania niejednorodnego, w którym $\alpha \neq 0$.

4.2 Główne wyniki

W tym rozdziale przedstawimy główne wyniki z prac [H1]–[H5], które stanowią osiągnięcie naukowe rozprawy habilitacyjnej.

4.2.1 Wzory całkowe dla rozwiązań Ablowitza-Segura: artykuł H1

Głównymi wynikami pracy [H1] są twierdzenia przedstawiające wzory na wartości całek Cauchy'ego dla rozwiązań Ablowitza-Segura niejednorodnego równania PII, w zależności od parametrów α oraz k . Pierwszy wynik [Twierdzenie 1, H1] dotyczy rozwiązań rzeczywistych.

Twierdzenie 4.2. *Jeśli $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ oraz $k \in (-\cos(\pi\alpha), \cos(\pi\alpha))$, to odpowiadające tym parametrom rzeczywiste rozwiązanie Ablowitza-Segura równania Painlevé II spełnia równość*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x u(y; \alpha, k) dy = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cos(\pi\alpha) + k}{\cos(\pi\alpha) - k} \right).$$

Nasz kolejny wynik [Twierdzenie 2, H1] to wzór całkowy dla rozwiązań urojonych.

Twierdzenie 4.3. *Jeśli $\alpha, k \in i\mathbb{R}$, to odpowiadające tym parametrom urojone rozwiązanie Ablowitza-Segura równania Painlevé II spełnia następującą równość*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left(\int_{-x}^x u(y; \alpha, k) dy \right) = \frac{\cos(\pi\alpha) + k}{(\cos^2(\pi\alpha) - k^2)^{1/2}}.$$

W dowodzie powyższych twierdzeń wykorzystujemy problem Riemanna-Hilberta (RH1)–(RH4) stowarzyszony z równaniem PII, który zdefiniowany jest przez liczbę α oraz współczynniki Stokesa (4.16). Wówczas odpowiadające mu rozwiązanie $\Phi(\lambda, x)$ wyznacza funkcję $u(x) = u(x; \alpha, k)$ poprzez granicę (4.13). Ponadto wiadomo, że spełniony jest układ Flaschki-Newella (zob. [30])

$$\begin{cases} \partial_\lambda \Phi(\lambda, x) = \mathcal{U}_1(\lambda, x) \Phi(\lambda, x), \\ \partial_x \Phi(\lambda, x) = \mathcal{U}_2(\lambda, x) \Phi(\lambda, x), \end{cases} \quad (4.25)$$

gdzie \mathcal{U}_1 oraz \mathcal{U}_2 są macierzami zespolonymi wymiaru 2×2 danymi wzorami

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1(\lambda, x) &:= -i(4\lambda^2 + x + 2u^2(x))\sigma_3 - (4\lambda u(x) + \alpha\lambda^{-1})\sigma_2 - 2u_x(x)\sigma_1, \\ \mathcal{U}_2(\lambda, x) &:= -i\lambda\sigma_3 - u(x)\sigma_2.\end{aligned}$$

Rozwiązania problemu (RH1)–(RH4) posiada następującą reprezentację

$$\Phi(\lambda) = Z(\lambda)e^{-\theta(\lambda)\sigma_3}\lambda^{\alpha\sigma_3}, \quad \lambda \in \Omega_r.$$

gdzie $Z(\lambda) := Z(\lambda, x)$ jest funkcją holomorficzną na kuli $B(0, r)$. Wówczas na podstawie drugiego równania z układu (4.25) wnosimy, że odwzorowanie $P(x) := Z(0, x)$, spełnia równanie liniowe

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = -u(x)\sigma_2 P(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus X. \quad (4.26)$$

W przypadku rzeczywistych i urojonych rozwiązań Ablowitza-Segura zbiór biegunów funkcji $u(x)$ nie zawiera żadnej liczby rzeczywistej. Dlatego, jeśli oznaczymy

$$v(x_1, x_2) := \int_{x_1}^{x_2} u(y) dy, \quad x_1 < x_2,$$

to rozwiązanie $P(x)$ równania (4.26) spełnia następującą równość

$$P(x)P(-x)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{v(-x,x)} + e^{-v(-x,x)}) & \frac{i}{2}(e^{v(-x,x)} - e^{-v(-x,x)}) \\ -\frac{i}{2}(e^{v(-x,x)} - e^{-v(-x,x)}) & \frac{1}{2}(e^{v(-x,x)} + e^{-v(-x,x)}) \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

Wynika stąd, że wyznaczenie wartości całek Cauchy'ego w Twierdzeniach 4.2 oraz 4.3 sprowadza się do problemu badania asymptotycznego zachowania funkcji $P(x)$, gdy $x \rightarrow \pm\infty$, któremu poświęcone są Sekcje 3 oraz 4 w pracy [H1]. W szczególności łącząc [Propozycję 3, H1] wraz z oszacowaniami danymi w [Propozycjach 1 oraz 2, H1] uzyskujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.4. *Odwzorowanie $P(x)$ posiada następujące rozwinięcie asymptotyczne*

$$P(x) = \frac{1}{2}(I + O(|x|^{-\frac{3}{4}}))e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 - 2\alpha \\ -1 & 1 - 2\alpha \end{pmatrix} e^{2\pi i\alpha\sigma_3} (-ix)^{\alpha\sigma_3} D, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (4.27)$$

gdzie D jest macierzą daną wzorem

$$D := \frac{\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\cos \pi\alpha} \begin{pmatrix} \frac{2^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}}{\Gamma(1/2+\alpha)} & 0 \\ 0 & \frac{-i2^\alpha \cos(\pi\alpha)e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(3/2-\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Konsekwencją [Propozycji 8, H1] oraz oszacowań zawartych w [Propozycji 5, H1] jest kolejne twierdzenie dotyczące zachowania funkcji $P(x)$, gdy $x \rightarrow -\infty$.

Twierdzenie 4.5. *Odwzorowanie $P(x)$ posiada następujące rozwinięcie asymptotyczne*

$$P(x) = \frac{1}{2}(I + O(|x|^{-\frac{3}{4}}))e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 - 2\alpha \\ -1 & 1 - 2\alpha \end{pmatrix} DK e^{2\pi i\alpha\sigma_3} (-ix)^{\alpha\sigma_3}, \quad (4.28)$$

gdzie macierz K dana jest wzorem

$$K := \frac{1}{(1 - s_1 s_3)^{1/2}} \begin{pmatrix} \cos(\pi\alpha) - k & 0 \\ 0 & \cos(\pi\alpha) + k \end{pmatrix} e^{-i\pi\alpha\sigma_3}.$$

Twierdzenia 4.4 oraz 4.5 są prawdziwe zarówno wtedy, gdy rozważany problem RH wyznacza rzeczywiste, jak i urojone rozwiązanie Ablowitza-Segura. Ich dowody zaczynają się od analizy punktów krytycznych i krzywych Stokesa funkcji fazowej $\theta(\lambda, x)$, w zależności od znaku parametru $x \in \mathbb{R}$. Prowadzi to do odpowiednich deformacji konturu Σ , które pozwalają nam na uzyskanie wzorów (4.27) oraz (4.28) za pomocą metody najszybszego spadku oraz poprzez znalezienie lokalnych rozwiązań aproksymujących dla zdeformowanego problemu RH w otoczeniu szczególnych punktów należących do jego konturu. W przypadku $x > 0$, który odpowiada wzorowi (4.27), odpowiednie deformacje oraz rozwiązania aproksymujące zaadaptowane są z [30, Rozdział 11.6], w którym dowodzone jest rozwinięcie asymptotyczne (4.18). Główna trudność polega na otrzymaniu odpowiednich reprezentacji dla rozwiązania zdeformowanego problemu RH przy użyciu metody najszybszego spadku oraz własności operatora Cauchy'ego zdefiniowanego na przestrzeniach Lebesgue'a (zob. [Sekcja 3, H1]). W przypadku $x < 0$, który związany jest ze wzorem (4.28), zaczynamy od zamiany zmiennych $\lambda = (-x)^{1/2}z$, $t = (-x)^{3/2}$ w problemie RH stowarzyszonym z równaniem PII, a następnie opieramy się na [20] aby dokonać deformacji konturu Σ . Prowadzą one do nowego problemu RH określonego na pewnym konturze zorientowanym Σ_3 (notacja zgodna z pracą [H1]) zawierającym takie punkty specjalne jak środek układu współrzędnych jak i punkty $z_{\pm} := \pm 1/2$ będące punktami krytycznymi przeskalowanej funkcji fazowej $\tilde{\theta}(z) := i(4z^3/3 - z)$. Główna trudność w dowodzie wzoru (4.28) polega na wyznaczeniu wzoru jawnego na lokalne rozwiązanie aproksymujące dla zdeformowanego problemu RH w otoczeniu początku układu współrzędnych. Sprowadza się to do znalezienia odwzorowania $T^{(0)}(z) := T^{(0)}(t, z)$ o wartościach w przestrzeni $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, które spełnia na kuli domkniętej $D(0, \delta)$ o dostatecznie małym promieniu $\delta > 0$, następujący problem RH.

- (a) Odwzorowanie $T^{(0)}(z)$ jest holomorfczne na zbiorze $B(0, \delta) \setminus \Sigma_3$, gdzie $D(0, \delta) \cap \Sigma_3$ jest konturem zilustrowanym na Rysunku 2a.
- (b) Dla $z \in D(0, \delta) \cap \Sigma_3$ takiego, że $z \neq 0$, oznaczmy przez $T_+^{(0)}(z)$ oraz $T_-^{(0)}(z)$ granicą odwzorowania $T^{(0)}(z')$, gdy $z' \rightarrow z$ odpowiednio z lewej (+) oraz prawej (-) strony konturu $B(0, \delta) \cap \Sigma_3$, względem jego orientacji. Wówczas spełniony jest następujący warunek

$$T_+^{(0)}(z) = T_-^{(0)}(z)S_3(z), \quad z \in D(0, \delta) \cap \Sigma_3, \quad z \neq 0,$$

gdzie $S_3(z)$ jest macierzową funkcją skoku zilustrowaną na Rysunku 2a.

- (c) Relacja asymptotyczna

$$T^{(0)}(z)N(z)^{-1} = I + O(t^{-1}), \quad t \rightarrow +\infty,$$

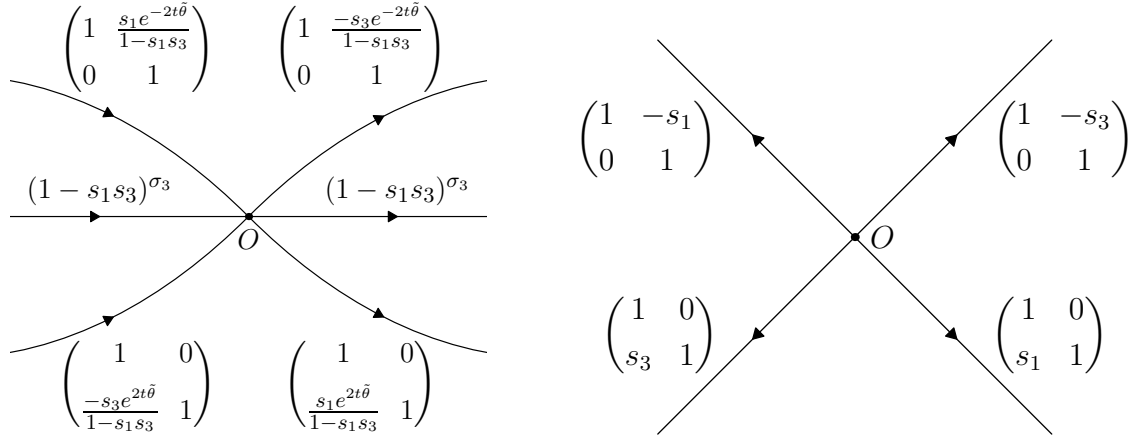
spełniona jest jednostajnie dla $z \in \partial D(0, \delta)$.

- (d) Odwzorowanie $T^{(0)}(z)$ posiada następujące zachowanie asymptotyczne

$$T^{(0)}(z) = O \left(\begin{array}{cc} |z|^{-|\operatorname{Re} \alpha|} & |z|^{-|\operatorname{Re} \alpha|} \\ |z|^{-|\operatorname{Re} \alpha|} & |z|^{-|\operatorname{Re} \alpha|} \end{array} \right), \quad z \rightarrow 0.$$

Znalezienie rozwiązania lokalnego problemu (a)–(d) sprowadza się do rozważania pomocniczego problemu RH, określonego na konturze $\bar{\Sigma}$, który składa się z czterech zorientowanych półprostych $\arg z = \pm \frac{\pi}{4}$ oraz $\arg z = \pm \frac{3\pi}{4}$, tak jak pokazano na Rysunku 2b. Problem ten polega na znalezieniu odwzorowania $\bar{\Phi}(z)$ o wartościach w przestrzeni $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, które spełnia następujące warunki.

- (i) Funkcja $\bar{\Phi}(z)$ jest holomorfczna na zbiorze $\mathbb{C} \setminus \bar{\Sigma}$.



Rysunek 2: (a) Kontur $D(0, \delta) \cap \Sigma_3$ i funkcja skoku $S_3(z)$. (b) Kontur $\bar{\Sigma}$ i funkcją skoku $\bar{S}(z)$.

(ii) Dla dowolnego $z \in \bar{\Sigma} \setminus \{0\}$, ma miejsce równość

$$\bar{\Phi}_+(z) = \bar{\Phi}_-(z)\bar{S}(z),$$

gdzie $\bar{S}(z)$ jest macierzową funkcją skoku zilustrowaną na Rysunku 2b.

(iii) W otoczeniu zera mają miejsce następujące relacje asymptotyczne

$$\bar{\Phi}(z) = O \begin{pmatrix} |z|^{-|\operatorname{Re} \alpha|} & |z|^{-|\operatorname{Re} \alpha|} \\ |z|^{-|\operatorname{Re} \alpha|} & |z|^{-|\operatorname{Re} \alpha|} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow 0.$$

(iv) Odwzorowanie $\bar{\Phi}(z)$ posiada następujące zachowanie asymptotyczne

$$\bar{\Phi}(z) = (I + O(|z|^{-1})) e^{iz\sigma_3}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Konstrukcja wzoru rozwiązania powyższego problemu (i)–(iv) zawarta jest w Sekcji 6 w pracy [H1] i polega na wykonaniu ciągu deformacji prowadzących do problemu RH, którego rozwiązanie możliwe jest do wyrażenia za pomocą funkcji Bessela. Znając wzór funkcji $\bar{\Phi}(z)$ spełniającej problem (i)–(iv) możemy sformułować kolejny wynik [Twierdzenie 3, H1], który dostarcza jawnego wzoru na rozwiązanie problemu (a)–(d).

Twierdzenie 4.6. *Rozwiązanie lokalnego problemu (a)–(d) dane jest wzorem*

$$T^{(0)}(z) := \begin{cases} N(z)e^{i\pi\nu\sigma_3}\bar{\Phi}(t\eta(z))e^{-it\eta(z)\sigma_3}e^{-i\pi\nu\sigma_3}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ N(z)e^{-i\pi\nu\sigma_3}\bar{\Phi}(t\eta(z))e^{-it\eta(z)\sigma_3}e^{i\pi\nu\sigma_3}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

gdzie $\eta(z) := z - 4z^3/3$ jest lokalną zamianą zmiennych, $\nu := -(2\pi i)^{-1} \ln(1 - s_1 s_3)$ jest stałą oraz

$$N(z) := \left(\frac{z + 1/2}{z - 1/2} \right)^{\nu\sigma_3}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [z_-, z_+],$$

jest funkcją, w której gałąź logarytmu jest określona przez warunek $\arg(z \pm 1/2) \in (-\pi, \pi)$.

Problem znalezienia wzorów całkowych dla rozwiązań równania PII był podejmowany w pracy [3], w której wyznaczono wartość całki Cauchy'ego dla rozwiązań Hastinga-McLeoda równania jednorodnego, które odpowiada współczynnikom Stokesa (4.16) z $\alpha = 0$ oraz $k = \pm 1$. Pozwoliło to na wyznaczenie wyrazu stałego w rozwinięciu asymptotycznym funkcji rozkładu Tracy-Widom [77] dla macierzy losowych GOE i GSE. W kolejnej pracy [4] uzyskano następującą zależność dla

rzeczywistych i urojonych rozwiązań Ablowitza-Segura jednorodnego równania PII

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(y; 0, k) dy = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right), \quad \text{jeśli } k \in (-1, 1) \quad \text{lub} \quad k \in i\mathbb{R}.$$

Twierdzenia 4.2 oraz 4.3, które zostały otrzymane w artykule [H1], stanowią nietrywialne rozszerzenie powyższego wzoru na przypadek równania niejednorodnego, w którym $\alpha \neq 0$. Główną trudnością jest fakt, że stowarzyszony problem RH posiada osobliwość w początku układu współrzędnych, co nie ma miejsca w przypadku jednorodnym. Prowadzi to do konieczności znalezienia wzoru na rozwiązanie aproksymujące $T^{(0)}(z)$, którego dostarcza Twierdzenie 4.6. Wspomnijmy, że lokalny problem (a)–(d) rozpatrywany był również w [20] w dowodach wzorów asymptotycznych (4.19), (4.20), (4.21) oraz (4.22), (4.23), (4.24) odpowiednio dla rzeczywistych i urojonych rozwiązań Ablowitza-Segura niejednorodnego równania PII. Wykazane zostało jedynie istnienie rozwiązania tego problemu za pomocą alternatywy Fredholma, zaś brak jego jawnego wzoru uniemożliwił dokonanie rygorystycznego rozwinięcia składnika $O((-x)^{-1})$ w wymienionych relacjach asymptotycznych. Dlatego Twierdzenie 4.6 jest również wykorzystywane w pracy [S13], w której zajmujemy się rozwinięciami asymptotycznymi dla ogólnej klasy rzeczywistych i urojonych rozwiązań równania PII.

Główne wyniki z pracy [H1] mają istotne zastosowania w rozwiązywaniu kolejnych zagadnień matematycznych. W szczególności Twierdzenie 4.3 pełni ważną rolę w dowodzie istnienia osobliwości spiralnych dla potoku geometrycznego (4.4), co będzie szczegółowo omówione w Sekcji 4.2.2. Ponadto Twierdzenie 4.3 pozwala udowodnić istnienie rozwiązań gładkich dla równania mKdV (4.7) z krytycznymi warunkami początkowymi w postaci kombinacji liniowej delty Diraca oraz wartości głównej Cauchy’ego, co będzie tematem Sekcji 4.2.3.

4.2.2 Osobliwości spiralne dla potoku geometrycznego: artykuł H2

Mając dane $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\theta_{\pm} \in [0, 2\pi)$ takie, że $|\theta_+ - \theta_-| \neq \pi$, zdefiniujmy odwzorowanie o wartościach zespolonych

$$z_0(x) := \begin{cases} x(1 + \mu^2)^{-1/2} e^{i(\theta_+ - \mu \ln x)}, & x > 0, \\ x(1 + \mu^2)^{-1/2} e^{i(\theta_- - \mu \ln |x|)}, & x < 0, \end{cases} \quad (4.29)$$

które przedstawia dwie przystające do siebie *spirale logarytmiczne*. Zauważmy, że jeśli $\mu = 0$, to wzór (4.29) opisuje dwie półproste mające punkt wspólny w środku układu współrzędnych (zob. Rysunek 3). Głównym wynikiem pracy [H2] jest następujące twierdzenie.

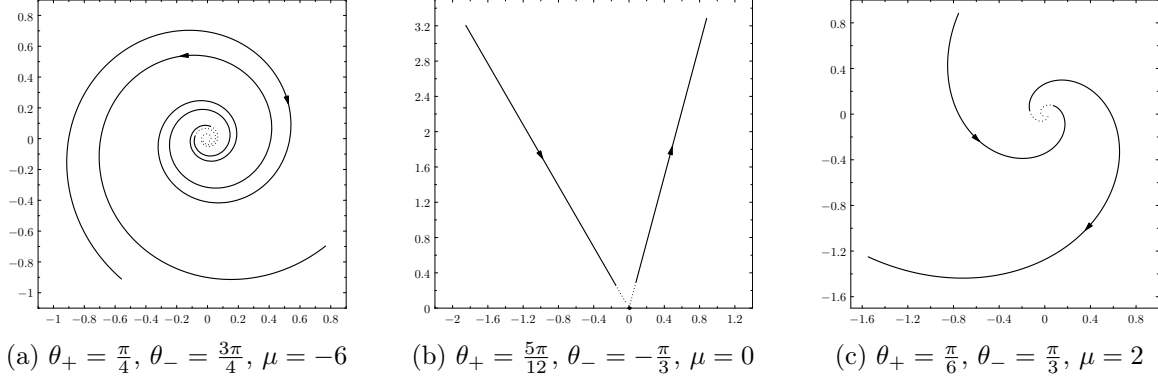
Twierdzenie 4.7. *Dla dowolnych $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\theta_+, \theta_- \in [0, 2\pi)$ takich, że $|\theta_+ - \theta_-| \neq \pi$, istnieje $\beta \in [0, 2\pi)$ oraz meromorficzna funkcja $u(x)$ spełniająca równanie Painlevé II ze stałą $\alpha := -i\mu/2$, takie, że $u(x)$ nie ma biegunów na osi liczb rzeczywistych, $u(x) \in i\mathbb{R}$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz funkcja $z(t, x)$, dana wzorem (4.10), jest gładkim rozwiązaniem potoku geometrycznego (4.4) takim, że spełniona jest następująca nierówność*

$$|z(t, x) - z_0(x)| \lesssim t^{1/3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad t > 0, \quad (4.30)$$

gdzie $z_0(x)$ jest podwójną spiralą logarytmiczną daną wzorem (4.29).

W dowodzie Twierdzenia 4.7 poszukujemy funkcji profilowej w zbiorze urojonych rozwiązań Ablowitza-Segura $u(x; \alpha, k)$, w których parametry $\alpha, k \in i\mathbb{R}$ konstruujemy za pomocą θ_{\pm} oraz μ w następujący sposób. Na początku przyjmujemy $\alpha := -i\mu/2$ i definiujemy $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jako

$$a := \begin{cases} (\theta_+ - \theta_- + 2\pi)/2, & \theta_+ - \theta_- \in (-2\pi, -\pi), \\ (\theta_+ - \theta_-)/2, & \theta_+ - \theta_- \in (-\pi, \pi), \\ (\theta_+ - \theta_- - 2\pi)/2, & \theta_+ - \theta_- \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$



Rysunek 3: Wykresy osobliwości $z_0(x)$ ze szczególnymi przykładami parametrów θ_+ , θ_- oraz μ . Strzałka wskazuje naturalną orientację poszczególnych krzywych.

Wtedy wybieramy parametr $k \in i\mathbb{R}$ tak aby odpowiadające mu rozwiązanie $u(y; \alpha, k)$ równania PII spełniało następującą równość

$$e^{ia} = \exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(y; \alpha, k) dy\right). \quad (4.31)$$

W tym celu używamy Twierdzenia 4.3, które jest jednym z głównych wyników pracy [H1]. Twierdzenie to mówi nam, że (4.31) jest równoważne z równością

$$e^{ia} = \frac{\cos(i\pi\mu/2) - k}{(\cos^2(i\pi\mu) - k^2)^{1/2}} = \frac{\cosh(\pi\mu/2) - k}{(\cosh^2(\pi\mu) - k^2)^{1/2}},$$

która, jak nietrudno sprawdzić, posiada jednoznaczne rozwiązanie $k \in i\mathbb{R}$. Kolejnym etapem doświadczenia są oszacowania prowadzące do wykazania nierówności (4.30). Zwróćmy uwagę, że wynikiem opisanej konstrukcji jest nie tylko istnienie odpowiedniej funkcji profilowej, ale również kompletna informacja na temat jej współczynników Stokesa, która umożliwia analizę asymptotycznego zachowania rozwiązania $z(t, x)$ w otoczeniu osobliwości spiralnej $z_0(x)$. Okazuje się, że możemy wyróżnić dwa obszary

$$S_{\pm} := \{(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}_{\pm} \mid 0 < t^{1/3} \lesssim \pm x\},$$

w których rozwiązanie potoku geometrycznego posiada różne zachowania asymptotyczne. Kolejnym wynikiem pracy [H2] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.8. *Załóżmy, że mamy dane $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\theta_+, \theta_- \in [0, 2\pi)$ takie, że $|\theta_+ - \theta_-| \neq \pi$. Wtedy rozwiązanie $z(t, x)$ skonstruowane w Twierdzeniu 4.7 spełnia następującą zależność*

$$z(t, x) = e^{-i\mu \ln x} (A_0 x + A_1 t x^{-2} + A_2 t^2 x^{-5}) + R_+(t, x), \quad (t, x) \in S_+,$$

w której kolejne współczynniki dane są jako

$$A_0 := (1 + \mu^2)^{-1/2} e^{i\theta_+}, \quad A_1 := (i\mu - 1)(i\mu + \mu^2/2)A_0, \quad A_2 := (2 + i\mu)(\mu^2/4 - i\mu + 6)A_1,$$

zaś reszta R_+ spełnia oszacowanie

$$|R_+(t, x)| \lesssim t^3 x^{-8}, \quad (t, x) \in S_+.$$

Ponadto rozwiązanie $z(t, x)$ spełnia następującą równość

$$z(t, x) = e^{-i\mu \ln|x|} (B_0 x + B_1 t^{1/2} |x|^{-1/2} + B_2 t^{3/4} |x|^{-5/4} \cos \Psi(t^{-1/3} x)) + R_-(t, x), \quad (t, x) \in S_-, \quad (4.32)$$

gdzie współczynniki dane są jako

$$B_0 := (1 + \mu^2)^{-1/2} e^{i\theta_-}, \quad B_1 := 2\sqrt{3}d^2(1 - i\mu)B_0, \quad B_2 := -\sqrt[4]{3}d^{-1}B_1.$$

W równaniu (4.32), reszta R_- spełnia oszacowanie

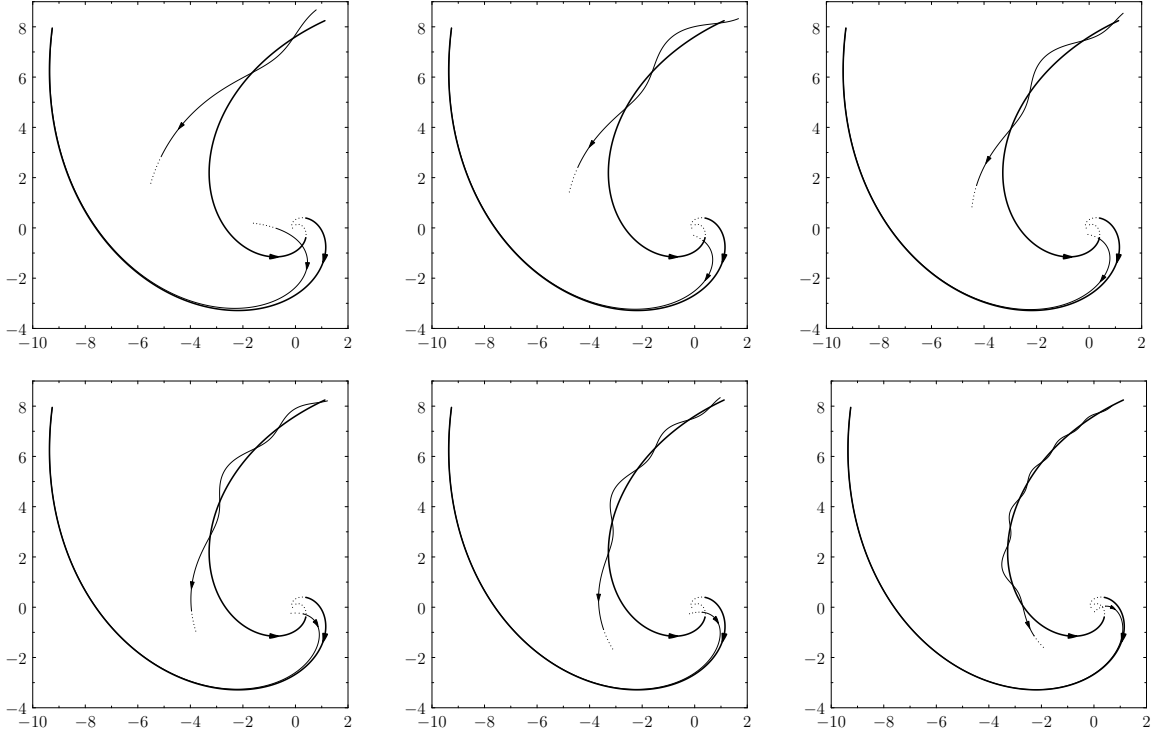
$$|R_-(t, x)| \lesssim tx^{-2}, \quad (t, x) \in S_-,$$

zaś funkcja fazowa dana jest wzorem $\Psi(x) := \frac{2}{3}(-x/\sqrt[3]{3})^{3/2} - \frac{3}{4}d^2 \ln(-x/\sqrt[3]{3}) + \phi$, gdzie

$$d := i\sqrt{\ln(1 + \operatorname{tg}^2((\theta_+ - \theta_-)/2)) + 2 \ln \cosh(\pi\mu/2)/\sqrt{\pi}},$$

$$\phi := -\frac{3}{2}d^2 \ln 2 + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2}id^2\right) - \frac{\pi}{4} + \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{tgh}(\pi\mu/2)}{\operatorname{tg}((\theta_+ - \theta_-)/2)}\right).$$

W szczególności Twierdzenie 4.8 mówi, że dla dostatecznie małych czasów $t > 0$ rozwiązanie $z(t, x)$ posiada oscylacyjne zachowanie w obszarze S_- , co uwidocznione jest na Rysunku 4.



Rysunek 4: Rozwiązanie $z(t, x)$ potoku geometrycznego rozwijające osobliwość $z_0(x)$ z parametrami $\theta_+ = \pi/4$, $\theta_- = 3\pi/4$, $\mu = 1.5$ (linia pogrubiona). Kolejne diagramy ilustrują zachowanie asymptotyczne rozwiązania $z(t, x)$ dla malejącego ciągu czasów $t = 2.6, 1.6, 1.2, 0.8, 0.6, 0.2$.

Problem istnienia osobliwości spiralnych dla potoku (4.4) był wcześniej podejmowany w [66], gdzie pokazano, że jeśli wartość $|\theta_+ - \theta_-| + |\mu|$ jest dostatecznie bliska zero, to podwójna spirala logarytmiczna (4.29) jest osobliwością rozwijaną w skończonym czasie przez gładkie rozwiązanie potoku geometrycznego (4.4). Otwartym pytaniem pozostało rozstrzygnięcie czy każda osobliwość spiralna postaci (4.29) posiada tę własność. Twierdzenie 4.7 stanowi rozwiązanie tego problemu dla pełnego zakresu parametrów θ_{\pm} oraz μ .

Zauważmy, że rezultaty uzyskane w [9] stwierdzają istnienie i jednoznaczność rozwiązań globalnych równania nielokalnego (4.6) dla warunków początkowych z przestrzeni $C^{k,\alpha}$, gdzie $k \geq 0$ i $\alpha \in (0, 1)$ (zob. również [7], [58, Twierdzenie 8.8]). Dlatego powstawanie osobliwości spiralnych jest zjawiskiem charakterystycznym dla potoku (4.4).

Twierdzenia 4.7 oraz 4.8 nawiązują do istniejących w literaturze rezultatów dla *potoku binormalnego*, który jest aproksymacją dynamiki *włókien wirowych* w przestrzeni \mathbb{R}^3 (zob. [8], [19] and [79]). Przypominamy, że w [41] udowodniono, że dwie zaczynające się początku układu współrzędnych półproste w \mathbb{R}^3 stanowią osobliwość rozwijaną w skończonym czasie przez gładkie samopodobne rozwiązanie tego potoku, którego funkcja profilowa jest spełnia jednowymiarowe równanie Schrödingera. W kolejnej pracy [40] rozszerzono klasę możliwych osobliwości na trójwymiarowe spirale. Rozważania z pracy [H2] można potraktować jako część równoległego kierunku badawczego dla potoku geometrycznego (4.4), który bazuje na technikach związanych z problemem RH.

4.2.3 Równanie mKdV ze szczególnymi warunkami początkowymi: artykuł H3

Rozważmy zmodyfikowane równanie Kortewega-de Vriesa (4.7) z warunkami początkowymi

$$k_{a,b}(x) := a\delta(x) + b \text{p.v.}(1/x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.33)$$

gdzie parametry a oraz b są liczbami rzeczywistymi, $\delta(x)$ jest deltą Diraca, zaś $\text{p.v.}(1/x)$ jest wartością główną Cauchy'ego. Głównym rezultatem pracy [H3] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.9. *Dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$ oraz $b \in (-1, 1)$, istnieje meromorficzna funkcja $u(x)$ spełniająca równanie Painlevé II ze stałą $\alpha := -\frac{b}{2}$, takie, że $u(x)$ nie ma biegunów na osi liczb rzeczywistych, $u(x) \in \mathbb{R}$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz funkcja $k(t, x)$ dana wzorem (4.9) jest gładkim rozwiązaniem równania (4.7) spełniającym warunek początkowy*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} k(t, x) = a\delta(x) + b \text{p.v.}(1/x) \quad \text{w } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (4.34)$$

Ponadto powyższa granica staje się punktowa po przejściu do przestrzeni częstotliwości

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \widehat{k}(t, \xi) = a - i\pi b \operatorname{sgn} \xi, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dowód Twierdzenia 4.9 składa się z dwóch części. W pierwszej z nich poszukujemy funkcji profilowej w zbiorze rzeczywistych rozwiązań Ablowitza-Segura $u(x; \alpha, k)$. Aby wyznaczyć odpowiednie parametry α oraz k spełniające (4.17), przyjmujemy $\alpha := -\frac{b}{2}$, a następnie szukamy $k \in (-\cos(\pi\alpha), \cos(\pi\alpha))$ takiego, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x u(y; \alpha, k) dy = -\frac{a}{2}. \quad (4.35)$$

Kluczową rolę w tym zadaniu pełni Twierdzenie 4.2, które jest jednym z głównych wyników pracy [H1]. Twierdzenie to implikuje, że (4.35) jest równoważne z równaniem

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cos(\pi\alpha) + k}{\cos(\pi\alpha) - k} \right) = -\frac{a}{2},$$

które, jak łatwo sprawdzić, posiada jednoznaczne rozwiązanie $k \in (-\cos(\pi\alpha), \cos(\pi\alpha))$. W kolejnym etapie dowodu pokazujemy, że dystrybucja (4.33) jest warunkiem początkowym tak skonstruowanego rozwiązania samopodobnego. Pomysł polega na wykorzystaniu rozwinięć asymptotycznych (4.18) oraz (4.19) w celu otrzymania odpowiednich oszacowań, dzięki którym możliwe będzie pokazanie granicy (4.34). Przeszkodą przy wykorzystaniu wzoru (4.19), który został rygorystycznie wykazany w pracy [20], okazuje się być wyraz $O((-x)^{-1})$, który nie został rozwinięty ze względu na brak jawnego wzoru na lokalnego rozwiązania aproksymującego dla zdeformowanego problemu RH w otoczeniu zera. Kolejnym wynikiem pracy [H3] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.10. *Jeśli $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ oraz $k \in (-\cos(\pi\alpha), \cos(\pi\alpha))$ to rzeczywiste rozwiązanie Ablowitza-Segura $u(x; \alpha, k)$ równania Painlevé II posiada następujące rozwinięcie asymptotyczne, gdy $x \rightarrow -\infty$:*

$$u(x; \alpha, k) = \frac{d_R}{(-x)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}d_R^2 \ln(-x) + \phi_R\right) + \frac{\alpha}{x} + O((-x)^{-\frac{7}{4}}), \quad (4.36)$$

gdzie stałe d_R oraz ϕ_R dane są wzorami (4.20), (4.21).

W dowodzie Twierdzenia 4.10 rozważamy problem (RH1)–(RH4) stowarzyszonym z równaniem PII. Zamieniając zmienne i dokonując odpowiednich deformacji konturu Σ , otrzymujemy nowy równoważny problem RH, którego kontur zawiera punkty szczególne takie jak środek układu współrzędnych oraz $z_{\pm} := \pm 1/2$. Zastosowanie metody najszybszego spadku pokazuje, że wkład do wzoru (4.36) pochodzący z części konturu zdeformowanego problemu RH, znajdującej się z dala od punktów z_{\pm} i środka układu współrzędnych, jest wykładniczo mały. Wiadomo również, że rozwiązania aproksymacyjne dla problemu RH w otoczeniu punktów z_{\pm} mogą zostać skonstruowane przy użyciu cylindrycznych funkcji parabolicznych (zob. [30, Sekcja 9.4]), wnosząc do rozwinięcia (4.36) wyraz główny z funkcją cosinus wraz ze wzorami (4.20), (4.21) (zob. [20]). Dlatego główną częścią dowodu jest rozwinięcie reszty $O((-x)^{-1})$. W tym celu stosujemy wzór jawny $T^{(0)}(z)$ na rozwiązanie aproksymacyjne zdeformowanego problemu RH w otoczeniu początku układu współrzędnych, które otrzymaliśmy w Twierdzeniu 4.6. Ponadto używamy własności cylindrycznych funkcji parabolicznych, aby wyznaczyć ulepszone rozwinięcie asymptotyczne rozwiązań aproksymujących w otoczeniach punktów z_{\pm} (zob. Propozycje A3 oraz A4). Istotną rolę w uzyskaniu wzoru (4.10) pełnią również oszacowania z Sekcji 4 pracy [H3] wykorzystujące własności operatora Cauchy’ego określonego na konturowych przestrzeniach Lebesgue’a.

Zaznaczmy, że Twierdzenie 4.10 nie wnosi jedynie rygorystycznego dowodu na kolejny wyraz rozwinięcia asymptotycznego. Znając rozwiązania aproksymacyjne w otoczeniach wszystkich punktów szczególnych możemy wykorzystać zachowanie asymptotyczne funkcji Bessela i cylindrycznych funkcji parabolicznych (zob. [6]) do rygorystycznego wyznaczenia kolejnych wyrazów rozwinięcia rozwiązania. Dodatkowo, opisane rozumowanie można bez przeszkód zastosować otrzymaniu wersji Twierdzenia 4.10 dla urojonych rozwiązań Ablowitza-Segura.

Klasyczne podejście do problemu istnienia, jednoznaczności dla równania mKdV (4.7) wiąże się z rozpatrywaniem rozwiązań na skali przestrzeni Sobolewa $H^s(\mathbb{R})$, gdzie $s \in \mathbb{R}$. Niezmienniczość tego równania ze względu na skalowanie

$$u_{\lambda}(t, x) := \lambda u(\lambda^3 t, \lambda x), \quad \lambda > 0, \quad (4.37)$$

sugeruje istnienie lokalnych rozwiązań równania mKdV dla $s \geq s_c$, gdzie $s_c := -1/2$ jest wykładnikiem krytycznym (zob. [76]). Efektem rezultatów zawartych w pracach [52], [31], [12], [39] jest teoria istnienia, jednoznaczności i ciągłości rozwiązań w zależności od warunków początkowych dla równania (4.7) w przestrzeniach Sobolewa o wykładnikach $s \geq 1/4$. Alternatywna skala przestrzeni funkcyjnych, na której możliwe jest badanie istnienia mniej regularnych rozwiązań równania mKdV została wprowadzona w [37] poprzez normę

$$\|u\|_{\widehat{H}_{\sigma}^r(\mathbb{R})} := \|\langle \xi \rangle^{\sigma} \widehat{u}(\xi)\|_{L_{\xi}^{r'}(\mathbb{R})},$$

gdzie $r \geq 1$, $\sigma \geq 0$ oraz $1/r + 1/r' = 1$. Wówczas rezultaty z prac [37] oraz [38] implikują lokalne istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (4.7), dla warunków początkowych z przestrzeni $\widehat{H}_{\sigma}^r(\mathbb{R})$, gdzie $r \in (1, 2)$ oraz $\sigma = \sigma(r) := 1/2 - 1/(2r)$. W przypadku pary brzegowej $(r, \sigma) = (1, 0)$, odpowiadającej przestrzeni krytycznej ze względu na skalowanie (4.37), istnienie i jednoznaczność rozwiązań pozostaje pytaniem otwartym. Zauważmy, że dystrybucja (4.33) jest szczególnym warunkiem początkowym należącym do przestrzeni $\widehat{H}_0^1(\mathbb{R})$. W ostatniej pracy

[16], pokazano metodami analizy harmonicznej, że jeśli liczby $a, b \in \mathbb{R}$ są dostatecznie bliskie zeru, to istnieje gładkie samopodobne rozwiązanie równania (4.7) spełniające warunek początkowy (4.34). Znaczenie Twierdzenia 4.9 polega na zniesieniu ograniczenia dotyczącego lokalności parametrów a oraz b .

4.2.4 Spirale logarytmiczne w rozwiązaniach równania Eulera: artykuł H4

Celem pracy [H4] jest opracowanie teorii pozwalającej na znajdowanie słabych rozwiązań równania Eulera (4.1), których wirowość jest miarą o nośniku $\Sigma(t)$ będącym rodziną koncentrycznych spiral logarytmicznych. Mając dane $M \geq 1$ rozważmy funkcje dane wzorami

$$Z_m(\theta, t) = t^\mu e^{a(\theta-\theta_m)} e^{i\theta}, \quad \Gamma_m(\theta, t) = g_m t^{2\mu-1} e^{2a(\theta-\theta_m)}, \quad t > 0, \theta \in \mathbb{R}, \quad (4.38)$$

dla $0 \leq m \leq M-1$, gdzie poszczególne parametry są takie, że

$$a > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad g_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \theta_m \in [0, 2\pi). \quad (4.39)$$

Wówczas, dla dowolnego $t > 0$, każda z funkcji $Z_m(t, \theta)$ jest parametryzacją spirali $\Sigma_m(t)$ z rodziny $\Sigma(t) := \Sigma_0(t) \cup \dots \cup \Sigma_{M-1}(t)$, zaś $\Gamma_m(\theta, t)$ jest funkcją wyrażającą cyrkulację.

Definicja 4.11. Powiemy, że pole wektorowe $v \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty); \mathbb{R}^2)$ jest *słabym rozwiązaniem* równania Eulera (4.1) jeśli v jest słabo bezdywergentne, czyli

$$\int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla \psi = 0$$

dla dowolnej funkcji $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, oraz spełniona jest następująca równość

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(v \cdot \partial_t \varphi + \sum_{1 \leq i, j \leq 2} v_i v_j \partial_i \varphi_j \right) = 0$$

dla wszystkich pól wektorowych $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty); \mathbb{R}^2)$ takich, że $\text{div } \varphi = 0$.

Utożsamiając $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ definiujemy w notacji zespolonej samopodobne pole prędkości

$$v(t, z) := t^{\mu-1} w(z/t^\mu), \quad t > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\Sigma(t) \cup \{0\}), \quad (4.40)$$

w którym zespolona funkcja profilowa dana jest jako

$$w(z) = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{2ag_k}{r(a-i)} \left(r^{\frac{2a}{a+i}} e^{A(\theta_k-\theta)} \frac{e^{2\pi J(r, \theta, k)A}}{1 - e^{2\pi A}} \right)^*, \quad (4.41)$$

dla $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (\Sigma(1) \cup \{0\})$, gdzie

$$J(r, \theta, k) := \min \{j \in \mathbb{Z} : a(2\pi j + \theta_k - \theta) + \ln r > 0\}. \quad (4.42)$$

Wówczas w jest polem gradientowym (zob. [Sekcja 1.4, H4]) wyznaczonym przez potencjał

$$\Phi(z) := r^{iA} \sum_{k=0}^{M-1} g_k e^{A(\theta_k-\theta)} \frac{e^{2\pi J(r, \theta, k)A}}{1 - e^{2\pi A}}, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (\Sigma(1) \cup \{0\}).$$

Pomysł na ustalenie wzoru (4.41) polega na formalnym zastosowaniu prawa Biota-Savarta, do miary skoncentrowanej na zbiorze $\Sigma(t)$, w której funkcja gęstości dana jest jako $\gamma(t, Z_k(t, \theta)) = \partial_\theta \Gamma_k(t, \theta) / |\partial_\theta Z_k(t, \theta)|$. Wówczas w czasie $t = 1$ mamy

$$(K * \omega)(1, re^{i\theta}) = e^{i\theta} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \sum_{k=0}^{M-1} f_k^{r, \theta}(\sigma) d\sigma \right)^*, \quad \text{gdzie } f_k^{r, \theta}(\sigma) := \frac{2ag_k e^{2a\sigma}}{r - e^{(a+i)\sigma + i(\theta_k - \theta)}}. \quad (4.43)$$

Dla dowolnego $0 \leq k \leq M-1$, bieguny funkcji $f_k^{r,\theta}$, dane wzorami

$$\sigma_{j,k} := \frac{a-i}{1+a^2} \ln r - (2\pi j + \theta_k - \theta) \frac{1+ai}{1+a^2}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

są parami różnymi liczbami zespolonymi, które leżą na jednej prostej. Ponadto liczba całkowita $J_k = J(r, \theta, k)$ zdefiniowana przez (4.42) wyznacza najmniejszy indeks $j \in \mathbb{Z}$ taki, że $\text{Im } \sigma_{j,k} < 0$. Chociaż całka (4.43) nie musi być zbieżna, to szereg złożony z residuów funkcji $f_k^{r,\theta}$ w biegunach znajdujących się w dolnej półpłaszczyźnie zespolonej, jest zbieżny oraz ma miejsce równość

$$-\sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j \geq J_k} \text{res} \left(f_k^{r,\theta}, \sigma_{j,k} \right) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{2ag_k}{r(a+i)} r^{\frac{2a}{a+i}} e^{A(\theta_k - \theta)} \frac{e^{2\pi J(r,\theta,k)A}}{1 - e^{2\pi A}}. \quad (4.44)$$

Zastępując powyższą sumą wyrażenie znajdujące się w nawiasie po prawej stronie równania (4.43) otrzymujemy wzór (4.41), który, jak wynika z kolejnych wyników, jest szukaną funkcją profilową dla słabych rozwiązań samopodobnych.

W dalszym ciągu, bez straty ogólności rozumowania zakładamy, że $0 \leq \theta_0 < \dots < \theta_{M-1} < 2\pi$. Ponadto przyjmujemy, że każda spirala $\Sigma_m(t)$ jest zorientowana od zera do nieskończoności, dzięki czemu możemy naturalnie określić lewą (L) oraz prawą (R) stronę dowolnego punktu z tej krzywej. Niech $\Omega_m(t)$ będącego obszarem w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ znajdującym się między spiralami $\Sigma_m(t)$ oraz $\Sigma_{m+1}(t)$ przy założeniu, że $\Sigma_M(t) := \Sigma_0(t)$. Zaczynamy od następującego rezultatu [Twierdzenie 1.8, H4], który opisuje własności pola wektorowego v .

Twierdzenie 4.12. *Załóżmy, że v jest polem wektorowym danym wzorami (4.40), (4.41). Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.*

- (i) *Funkcja w^* jest holomorficzną na zbiorze $\mathbb{C} \setminus (\Sigma(1) \cup \{0\})$ oraz posiada ciągłe rozszerzenie do domknięcia zbioru $\Omega_m(1)$ dla wszystkich $0 \leq m \leq M-1$.*
- (ii) *Mając dane $z \in \Sigma(t)$, niech $v^R(t, z)$ oraz $v^L(t, z)$ oznaczają granice pola prędkości $v(t, z')$, gdy z' zmierza do z odpowiednio z prawej oraz lewej strony rodziny $\Sigma(t)$. Wtedy*

$$n(t, z) \cdot (v^R(t, z) - v^L(t, z)) = 0, \quad t > 0, \quad z \in \Sigma(t),$$

W szczególności pole wektorowe v jest słabo bezdywergentne.

- (iii) *Wirowość $\text{curl } v$ jest lokalnie skończoną miarą zadaną wzorem*

$$\text{curl } v(t) = \sum_{k=0}^{M-1} \gamma(t) \delta_{\Sigma_k(t)}, \quad t > 0, \quad (4.45)$$

gdzie $\gamma(t) : \Sigma(t) \rightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem danym jako

$$\gamma(t, Z_k(t, \theta)) = \frac{\partial_\theta \Gamma_k(t, \theta)}{|\partial_\theta Z_k(t, \theta)|} = 2ag_k t^{\mu-1} e^{a(\theta - \theta_k)}, \quad 0 \leq k \leq M-1. \quad (4.46)$$

- (iv) *Pole prędkości v wraz z ciśnieniem zdefiniowanym poprzez prawo Bernoulliego*

$$p(t, z) := -\partial_t \text{Re} [t^{2\nu-1} \Phi(z/t^\nu)] - |v(t, z)|^2/2, \quad t > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\Sigma(t) \cup \{0\}),$$

jest klasycznym rozwiązaniem równania Eulera (4.1) w punktach $t > 0$ oraz $z \in \Omega_m(t)$, gdzie $0 \leq m \leq M-1$. Ponadto prawdziwe są oszacowania

$$|v(t, z)| \leq Ct^{-1}|z|, \quad |p(t, z)| \leq Ct^{-2}|z|^2, \quad t > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\Sigma(t) \cup \{0\}),$$

gdzie stała $C > 0$ zależy od parametrów (4.39).

Z powyższego twierdzenia wynika, że wirowość pola wektorowego v jest miarą o nośniku zawartym w zbiorze $\Sigma(t)$, której gęstość wyraża się wzorem (4.46). Fakt, że para (v, p) jest klasycznym rozwiązaniem równania Eulera na zbiorze $\mathbb{C} \setminus (\Sigma(t) \cup \{0\})$ wynika bezpośrednio z prawa Bernoulliego oraz z równości $w = \Phi'$ (zob. [Sekcja 2, H4]). Głównymi wynikami pracy [H4] są dwa twierdzenia, które dostarczają warunków koniecznych i wystarczających, na to aby pole prędkości v było słabym rozwiązaniem równania Eulera nie tylko na zbiorze $\mathbb{C} \setminus (\Sigma(t) \cup \{0\})$, ale również na całej dziedzinie \mathbb{R}^2 . Kolejny rezultat jest kombinacją [Twierdzenia 1.2, H4] oraz [Twierdzenia 1.8, H4].

Twierdzenie 4.13. *Samopodobne pole wektorowe v jest słabym samopodobnym rozwiązaniem równania Eulera (4.1) wtedy i tylko wtedy, gdy następujące warunki zgodności prędkości*

$$n(t, z) \cdot (v(t, z)t - \mu z) = 0, \quad (4.47)$$

oraz zgodności ciśnienia

$$p(t, z) \text{ jest ciągłe w punkcie } z, \quad (4.48)$$

są spełnione dla wszystkich $t > 0$ oraz $z \in \Sigma(t)$.

Iloczyn skalarny występujący w warunku zgodności prędkości $n \cdot v := n \cdot v^L = n \cdot v^R$ jest poprawnie określony ze względu na Twierdzenie 4.12 (ii). Wkład Twierdzenia 4.13 polega na wyszczególnieniu zwięzłych warunków (4.47) oraz (4.48), które są dostateczne i wystarczające na to aby pole prędkości dane wzorami (4.40), (4.41) było słabym rozwiązaniem równania Eulera określonego na \mathbb{R}^2 . Następujący rezultat [Twierdzenie 1.3, H4] dostarcza nam ich równoważnej charakteryzacji w zależności od parametrów definiujących spirale (4.39).

Twierdzenie 4.14. *Założmy, że dla dowolnych $0 \leq k, m \leq M - 1$ mamy dane współczynniki*

$$\mathcal{A}_{mk} := e^{A(\theta_k - \theta_m)} \begin{cases} e^{-\pi A} & k > m, \\ \cosh(\pi A) & k = m, \\ e^{\pi A} & k < m, \end{cases}$$

gdzie $A := -2ai/(a+i)$. Wtedy warunek zgodności prędkości (4.47) jest równoważny z równaniami

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sinh(\pi A)} \sum_{k=0}^{M-1} \mathcal{A}_{mk} g_k \right) = -\frac{a^2 + 1 - 2\mu}{2a^2}, \quad 0 \leq m \leq M - 1,$$

zaś warunek zgodności ciśnienia (4.48) jest równoważny z układem

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sinh(\pi A)} \sum_{k=0}^{M-1} \mathcal{A}_{mk} g_k \right) = -\frac{\mu}{a}, \quad 0 \leq m \leq M - 1.$$

W dowodzie powyższego twierdzenia korzystamy bezpośrednio ze wzorów (4.40), (4.41) wyrażających samopodobne pole prędkości. Istotną rolę pełni w nim także funkcja $J(r, \theta, k)$ wraz z jej własnościami zawartymi w [Propozycji 3.1, H4]. Łącząc ze sobą Twierdzenia 4.13 oraz 4.14 otrzymujemy następujący rezultat.

Twierdzenie 4.15. *Pole wektorowe v jest słabym rozwiązaniem równania Eulera (4.1) wtedy i tylko wtedy, gdy parametry (4.39) definiujące spirale (4.38) spełniają układ równań*

$$\frac{1}{\sinh(\pi A)} \sum_{k=0}^{M-1} \mathcal{A}_{mk} g_k = -(a^2 + 1 - 2\mu + 2a\mu i)/2a^2, \quad 0 \leq m \leq M - 1. \quad (4.49)$$

Natychmiastowym wnioskiem jest następujący wniosek dotyczący istnienia słabych rozwiązań równania Eulera, których wirowość skoncentrowana jest na rodzinie spiral, danych przez parametry (4.39) z symetrycznym rozkładem kątów.

Wniosek 4.16. *Pole wektorowe v wyznaczone przez parametry*

$$a > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad g_m := g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \theta_m := 2\pi m/M \quad (4.50)$$

dla $0 \leq m \leq M-1$, jest słabym rozwiązaniem równania Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy parametry $a > 0$, $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $\mu \in \mathbb{R}$ spełniają równanie

$$a^2 + 1 - 2\mu + 2a\mu i = -2a^2 g \operatorname{ctgh}(\pi A/M). \quad (4.51)$$

Ponadto dla dowolnego $M \geq 1$, istnieje $a_0 > 0$ takie, że dla dowolnego $a \geq a_0$ powyższe równanie posiada jednoznaczne rozwiązanie $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dowód istnienia rozwiązań równania (4.51) polega się na badaniu zachowania asymptotycznego wektora $\operatorname{ctgh}(\pi A/M)$, który zawarty jest w płaszczyźnie zespolonej. Pokazujemy, że dla dostatecznie dużego $a > 0$, jego kierunek różni się od kierunku wektora $-1 + ai$. Wyrażając liczbę zespoloną $1 + a^2$ jako rzeczywistą kombinację liniową tych wektorów otrzymujemy istnienie jednoznacznych parametrów μ , g spełniających równanie (4.51) (zob. [Wniosek 1.4, H4]). Wniosek 4.16 dostarcza matematycznej interpretacji rodzin spiral symetrycznych jako zbiorów, w których skupiona jest wirowość słabych rozwiązań równania Eulera (4.1) określonych na \mathbb{R}^2 . W szczególności dla $M = 1$ powyższy rezultat odnosi się do pojedynczej *spirali Prandtla* [68], która znana jest z zastosowań w zagadnieniach z aerodynamiki i mechaniki płynów (zob. również [74]).

Naturalnie pojawiającym się pytaniem jest istnienie rozwiązań układu dyskretnego (4.49) innych niż spirale symetryczne. Problem ten jest tematem pracy [H5], która będzie szczegółowo omówiona w Sekcji 4.2.5.

4.2.5 Rozwiązania niesymetryczne dla układu dyskretnego: artykuł H5

Celem pracy [H5] jest pokazanie istnienia niesymetrycznych rozwiązań układu (4.49), dla których

$$\theta_{k+1} - \theta_k \neq 2\pi/M \quad \text{dla pewnego } 0 \leq k \leq M-1$$

przy założeniu, że $0 \leq \theta_0 < \dots < \theta_{M-1} < 2\pi$ oraz $\theta_M := \theta_0$. Zauważmy, że system (4.49) jest niezmienniczy względem przesunięcia $\theta_m \mapsto \theta_m + \alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Zatem, bez utraty ogólności możemy założyć, że $\theta_0 = 0$. Głównym wynikiem pracy [H5] jest następujące twierdzenie, które mówi o istnieniu słabych samopodobnych rozwiązań równania Eulera (4.1), których wirowość jest miarą o nośniku zawartym w rodzinie niesymetrycznych spiral logarytmicznych.

Twierdzenie 4.17. *Mając ustalone $M \in \{2, 3, 5, 7, 9\}$, oznaczmy $\bar{\theta}_k := k\pi/M$ dla $1 \leq k \leq M-1$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy wybrać $a_0 > 0$ takie, że dla $a \geq a_0$ istnieją*

$$(\theta_1, \dots, \theta_{M-1}) \in \mathbb{R}^{M-1}, \quad (g_0, g_1, \dots, g_{M-1}) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^M, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (4.52)$$

takie, że $|\theta_k - \bar{\theta}_k| \leq \varepsilon$ dla $1 \leq k \leq M-1$, oraz spełniony jest układ równań (4.49). W szczególności samopodobne pole wektorowe (4.40), (4.41) wyznaczone przez $\theta_0 = 0$ oraz parametry (4.52) jest słabym rozwiązaniem równania Eulera, którego wirowość jest miarą daną przez (4.45), (4.46).

Powyższe twierdzenie, za wyjątkiem przypadku $M = 2$, jest konsekwencją z następującego ogólnego rezultatu (zob. [Twierdzenie 3, H5]).

Twierdzenie 4.18. *Mając daną dowolną nieparzystą liczbę $M \geq 3$, niech \mathcal{C} będzie macierzą kwadratową daną wzorem*

$$\mathcal{C}_{lm} = \begin{cases} 2 \sin^2(\bar{\theta}_1) - (-1)^m \sin(2\bar{\theta}_1) \sin(2\bar{\theta}_m), & l = m, \\ (-1)^{m+1} \sin(2\bar{\theta}_1) (\sin(2\bar{\theta}_m) + (-1)^l \sin(2\bar{\theta}_{l-m})), & l < m, \\ (-1)^{m+1} \sin(2\bar{\theta}_1) (\sin(2\bar{\theta}_m) - (-1)^l \sin(2\bar{\theta}_{l-m})), & m < l, \end{cases}$$

dla $1 \leq l, m \leq M-1$. Wtedy teza Twierdzenia 4.17 jest spełniona jeśli macierz \mathcal{C} jest odwracalna.

Twierdzenie 4.17 otrzymujemy poprzez bezpośrednie sprawdzenie niezerowości wartości własnych macierzy \mathcal{C} dla $M \in \{3, 5, 7, 9\}$ oraz $n \in \{1, 2\}$ (zob. [Tabela 2, H5]). Wówczas jego teza jest konsekwencją Twierdzenia 4.18. Dowód przypadku $M = 2$ jest znacznie krótszy i dlatego rozpatrujemy go oddzielnie. Rachunki numeryczne wskazują, że macierz \mathcal{C} jest odwracalna również w przypadku nieparzystych $M \geq 9$, lecz rygorystyczne uzasadnienie tego faktu w pełnej ogólności pozostaje pytaniem otwartym.

Metoda dowodu Twierdzenia 4.18 opiera się na sprowadzeniu problemu szukania rozwiązań układu (4.49) do badania istnienia miejsc zerowych odpowiedniego odwzorowania nieliniowego. Aby je wprowadzić, dla dowolnych $a > 0$ oraz $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{M-1}) \in \mathbb{R}^{M-1}$ definiujemy funkcje

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(a, \Theta) &:= \frac{e^{\pi A} + (-1)^M e^{-\pi A}}{2} + (-1)^M \sum_{k=1}^{M-1} (-1)^k e^{A(\theta_k - \pi)}, \\ \mathcal{H}_l(a, \Theta) &:= \frac{e^{\pi A} - (-1)^M e^{-\pi A}}{2} + \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{l+k} e^{A(\theta_k - \theta_l + \pi)} + (-1)^M \sum_{k=l}^{M-1} (-1)^{l+k} e^{A(\theta_k - \theta_l - \pi)}, \end{aligned}$$

gdzie $1 \leq l \leq M-1$. Niech $F : D(F) \rightarrow \mathbb{R}^{M-1}$ będzie odwzorowaniem danym wzorem

$$\begin{aligned} D(F) &:= \{(a, \Theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^{M-1} \mid \mathcal{K}(a, \Theta) \neq 0\}, \\ F(a, \Theta) &:= \left[\operatorname{Im} \frac{\mathcal{H}_1(a, \Theta)}{\mathcal{K}(a, \Theta)}, \dots, \operatorname{Im} \frac{\mathcal{H}_{M-1}(a, \Theta)}{\mathcal{K}(a, \Theta)} \right], \quad (a, \Theta) \in D(F). \end{aligned}$$

Szukanie rozwiązań układu równań (4.49) sprowadza się do badania następujących równań

$$F(a, \Theta) = 0, \quad g_0 E_1(a, \Theta) + \mu E_2(a, \Theta) = -(1 + a^2) \mathcal{K}(a, \Theta) / (2a), \quad (4.53)$$

gdzie odwzorowania E_1 oraz E_2 dane są wzorami

$$\begin{aligned} E_1(a, \Theta) &:= \frac{a}{\sinh(\pi A)} \left(\cosh(\pi A) \mathcal{K}(a, \Theta) + \sum_{l=1}^{M-1} \mathcal{H}_l(a, \Theta) e^{A(\theta_l - \pi)} \right), \\ E_2(a, \Theta) &:= \left(i - \frac{1}{a} \right) \mathcal{K}(a, \Theta). \end{aligned}$$

Wówczas dowolne rozwiązanie $a > 0$, $g_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{M-1}) \in \mathbb{R}^{M-1}$ równań (4.53) wraz z $\theta_0 = 0$ i $g_k := g_0 \mathcal{H}_k(a, \Theta) / \mathcal{K}(a, \Theta)$ dla $1 \leq k \leq M-1$, spełnia układ dyskretny (4.49). Metoda na rozwiązanie układu (4.53) polega na znalezieniu gałęzi miejsc zerowych $\Theta(a)$ odwzorowania F takiej, że $\Theta(a) \rightarrow (\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{M-1})$, gdy $a \rightarrow \infty$. Istnienie takiej gałęzi otrzymujemy poprzez odpowiednie zastosowanie twierdzenia o lokalnym odwracaniu odwzorowań oraz założenia o odwracalności macierzy \mathcal{C} . Podstawiając funkcję $\Theta(a)$ do drugiego równania układu (4.53), przechodzimy do pokazania istnienia parametrów $g_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $\mu \in \mathbb{R}$ takich, że

$$g_0 E_1(a, \Theta(a)) + \mu E_2(a, \Theta(a)) = -(1 + a^2) \mathcal{K}(a, \Theta(a)) / (2a).$$

Sprowadza się to do pokazania, że dla dostatecznie dużych $a > 0$, wektory $E_1(a) := E_1(a, \Theta(a))$ oraz $E_2(a) := E_2(a, \Theta(a))$ są liniowo niezależne na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} , która jest rozumiana jako przestrzeń liniowa nad ciałem liczb rzeczywistych. W tym celu badamy rozwinięcia asymptotyczne funkcji $E_1(a)$ oraz $E_2(a)$, przy $a \rightarrow \infty$, po raz kolejny wykorzystując założenia o odwracalności macierzy \mathcal{C} , a także znane właściwości ciała liczb algebraicznych (zob. [45], [55]).

5 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

5.1 Publikacje nie uwzględnione w osiągnięciu habilitacyjnym

- [S1] A. Ćwiszewski, P. Kokocki, *Krasnosel'skii type formula and translation along trajectories method for evolution equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, vol. 22 (2008), no. 3, 605–628.
- [S2] A. Ćwiszewski, P. Kokocki, *Periodic solutions of nonlinear hyperbolic evolution systems*, Journal of Evolution Equations, vol. 10 (2010), no. 3, 677–710.
- [S3] P. Kokocki, *Periodic solutions for nonlinear evolution equations at resonance*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 392 (2012), no. 1, 55–74.
- [S4] P. Kokocki, *Averaging principle and periodic solutions for nonlinear evolution equations at resonance*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, vol. 85 (2013), 253–278.
- [S5] P. Kokocki, *Connecting orbits for nonlinear differential equations at resonance*, Journal of Differential Equations, vol. 255 (2013), no. 7, 1554–1575.
- [S6] P. Kokocki, *Invariant sets and connecting orbits for nonlinear evolution equations at resonance*, Mathematica Bohemica, Proceedings of Equadiff 13, vol. 140 (2015), no. 4, 447–455.
- [S7] P. Kokocki, *Effect of resonance on the existence of periodic solutions for strongly damped wave equation*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, vol. 125 (2015), 167–200.
- [S8] P. Kokocki, *Krasnosel'skii type formula and translation along trajectories method on the scale of fractional spaces*, Communications on Pure and Applied Analysis, vol. 14 (2015), no. 6, 2315–2334.
- [S9] P. Kokocki, *Homotopy invariants methods in the global dynamics of strongly damped wave equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, vol. 36 (2016), no. 6, 3227–3250.
- [S10] P. Kokocki, *On global dynamics of reaction–diffusion systems at resonance*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, vol. 198 (2020), article number: 111901, 1–28.
- [S11] A. Ćwiszewski, P. Kokocki, *Standing waves for Schrödinger equations with Kato-Rellich potentials*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, vol. 237 (2023), article number: 113373, 1–20.
- [S12] T. Cieślak, P. Kokocki, W. Ożański, *Linear instability of symmetric logarithmic spiral vortex sheets*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, vol. 26 (2024), art. no. 21.
- [S13] P. Kokocki, *Painlevé II transcendents and applications to PDEs*, zaakceptowana do Lecture Notes in Nonlinear Analysis, Juliusz P. Schauder Center for Nonlinear Studies.

Mój dorobek naukowy, nieobjęty rozprawą habilitacyjną, koncentruje się wokół takich obszarów analizy matematycznej, jak:

- nieliniowe równania ewolucyjne,
- niezmienniki homotopijne, w tym stopień topologiczny oraz indeks Conleya,
- stabilność rozwiązań 2D równania Eulera,

- problem Riemanna-Hilberta i jego dalsze zastosowania.

Poniżej przedstawimy krótkie opisy artykułów [S1] – [S13].

5.1.1 Asymptotyka rozwiązań równania Painlevé II: praca S13

Praca [S13] będzie zamieszczona w książce będącej zbiorem wykładów wygłoszonych podczas warsztatów *Geometric and Topological Methods in Dynamics of PDEs*, które odbyły się w dniach 13–15 lutego 2023 roku w Toruniu. Pierwsza część pracy ma charakter przeglądowy i dotyczy podstaw teorii istnienia rozwiązań dla ogólnie postawionego problemu RH. Omawiamy również zastosowania rozwiązań równania PII do badania równań różniczkowych cząstkowych, które zawarte są w pracach [H2] oraz [H3]. Druga część pracy [S13] zawiera nowe wyniki, które dotyczą rozwinięć asymptotycznych dla ogólnych rzeczywistych i urojonych rozwiązań równania PII. Przypomnijmy, że jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$, to rzeczywiste rozwiązania równania (4.3) są zdefiniowane przez współczynniki Stokesa (s_1, s_2, s_3) spełniające warunki (4.12) oraz (4.14). W szczególności zakładając, że $|s_1| \neq 1$ otrzymujemy

$$(s_1, s_2, s_3) = \left(s_1, \frac{s_1 + \bar{s}_1 + 2 \sin(\pi\alpha)}{1 - |s_1|^2}, \bar{s}_1 \right).$$

Ponadto, rozwiązania urojone równania PII ze stałą $\alpha \in i\mathbb{R}$ wyznaczone są przez współczynniki spełniające (4.12) oraz (4.15), co z kolei implikuje, że

$$(s_1, s_2, s_3) = \left(s_1, \frac{s_1 - \bar{s}_1 + 2 \sin(\pi\alpha)}{1 + |s_1|^2}, -\bar{s}_1 \right).$$

Głównymi wynikami [S13] są rygorystycznie udowodnione rozwinięcia asymptotyczne przy $x \rightarrow -\infty$ dla ogólnych rzeczywistych i urojonych rozwiązań $u(x)$ równania PII. Otrzymane wyniki rozszerzają znane wzory (4.19), (4.20), (4.21) oraz (4.22), (4.23), (4.24) dla rozwiązań Ablowitza-Segura, w przypadku których $s_2 = 0$. Metody zastosowane w [S13] polegają na analizie problemu Riemanna-Hilberta (RH1)–(RH4) stowarzyszonego z równaniem PII. Głównym etapem dowodu jest wprowadzenie nowych deformacji, które w przypadku ogólnych współczynników Stokesa prowadzą do problemu RH, którego kontur zawiera punkty szczególne takie jak $z_{\pm} = \pm 1/2$ oraz początek układu współrzędnych. Kolejnymi krokami są odpowiednie zastosowanie metody najszybszego spadku oraz użycie rozwiązań przybliżonych dla zdeformowanego problemu RH w otoczeniu tych punktów szczególnych. W przypadku z_{\pm} korzystamy z rozwiązań uzyskanych w [30, Section 9.4] za pomocą cylindrycznych funkcji parabolicznych. Wzór jawny na lokalne rozwiązanie w otoczeniu początku układu współrzędnych konstruujemy wykonując ciąg deformacji odwzorowania $T^{(0)}(t, z)$, które zostało otrzymane w Twierdzeniu 4.6.

5.1.2 Liniowa niestabilności spiral symetrycznych: praca S12

Celem pracy [S12] jest zbadanie liniowej stabilności symetrycznych spiral logarytmicznych (4.38), (4.50) dla $M \geq 3$, jako rozwiązań układu Birkhoffa-Rotta (BR). Z Wniosku 4.16 wynika, że dla dostatecznie dużych $a > 0$, równanie (4.51) posiada jednoznaczne rozwiązanie $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wówczas, na podstawie [28], spirale symetryczne (4.38) odpowiadające tak otrzymanym parametrom (4.50) spełniają następujący układ równań BR

$$\partial_t Z_m(t, \Gamma_m) = \left(\frac{1}{2\pi i} \text{P.v.} \int \sum_{k=1}^{M-1} \frac{d\Gamma'_k}{Z_m(t, \Gamma_m) - Z_k(t, \Gamma'_k)} \right)^*, \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad (5.1)$$

gdzie $Z_m(t, \Gamma_m)$ jest parametryzacją m -tej spirali względem odpowiadającego jej parametru cyrkulacji Γ_m . Zaburzając poszczególne parametryzacje $Z_m(t, \Gamma_m)$ odwzorowaniami $\zeta_m(t, \Gamma_m)$ dla

$0 \leq m \leq M - 1$, uzyskujemy formalną linearyzację układu (5.1) wzdłuż interfejsu będącego rodziną symetrycznych spiral logarytmicznych. Głównym wynikiem [S12] jest twierdzenie mówiące, że dla dostatecznie dużych $a > 0$ istnieje rozwiązanie $\zeta(t) = (\zeta_0(t), \dots, \zeta_{M-1}(t))$ otrzymanej linearyzacji takie, że

$$\|\zeta(t, \cdot)\|_{L^\infty} \geq Ct^\delta, \quad t > 0,$$

gdzie $C, \delta > 0$ są stałymi zależnymi od parametru $a > 0$. Otrzymany rezultat nawiązuje do znanej L^∞ niestabilności występującej przypadku płaskich rozwiązań $Z(t, \Gamma) = \Gamma$ równania BR, które odpowiadają potokowi ścinającemu (zob. [58, Sekcja 9.3]). Historycznie zjawisko niestabilności pojawiające się na granicy ośrodków poruszających się z różnymi prędkościami zostało zaobserwowane przez Helmholtza [43], który zauważył, że strugi powietrza wydobywającego się z puszczalek organowych tworzyły struktury w kształcie spiral. Analiza matematyczna tej niestabilności została dokonana kilkanaście lat później przez Kelvina [57] w sytuacji, gdy interfejs oddzielający ośrodki jest sinusoidą. Warto wspomnieć, że ostatnie wyniki z [70] pokazują, że rozwiązania równania BR będące wirującym lub poruszającym się ze stałą prędkością odcinkiem na płaszczyźnie zespolonej są również liniowo niestabilne. Zostało to pokazane poprzez zastosowanie podobnych metod polegających na badaniu formalnej linearyzacji odpowiadającego im równania BR.

5.1.3 Równania eliptyczne z potencjałem typu Kato-Rellicha: praca S11

Praca [S11] jest poświęcona szukaniu rozwiązań następującego problemu eliptycznego

$$-\Delta u + V(x)u - \lambda u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.2)$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest lokalnie Lipschitzowskim odwzorowaniem nieliniowym oraz $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ jest potencjałem typu Kato-Rellicha spełniającym warunek

$$\begin{cases} V = V_\infty + V_0, \text{ gdzie } V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ oraz } V_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), \text{ gdzie} \\ p \geq 2 \text{ dla } 1 \leq n \leq 3 \text{ oraz } p > n/2 \text{ dla } n \geq 4. \end{cases} \quad (5.3)$$

Powyższe równanie występuje przy badaniu fal stojących dla nieliniowego równania Schrödingera. Dzięki warunkowi (5.3) mamy, że $-\Delta + V$ jest dolnie ograniczonym operatorem samosprężonym określonym na przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^N)$ (zob. [51], [75]). Ponadto na mocy Twierdzenia Weyla (zob. [46, Twierdzenie 14.6]) oraz wzoru Perssona (zob. [46, Twierdzenie 14.11], [67]) jego spektrum znaczące $\sigma_{ess}(-\Delta + V)$ jest zawarte w przedziale $(\varrho(V_\infty), \infty)$, gdzie

$$\varrho(V_\infty) := \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{ess\,inf}_{|x| > R} V_\infty(x).$$

W szczególności część spektrum operatora $-\Delta + V$ znajdująca się poniżej wartości $\varrho(V_\infty)$ zawiera jedynie izolowane wartości własne. Głównymi wynikami [S11] są twierdzenia mówiące o istnieniu rozwiązań stacjonarnych dla równania (5.2) zarówno w przypadku nierezonansowym, gdy λ nie należy do spektrum linearyzacji odwzorowania $-\Delta + V - f$ przy $|u| \rightarrow \infty$ jak i rezonansowym, gdy $\lambda < \varrho(V_\infty)$ jest jej izolowaną wartością własną. W przypadku rezonansu nakładamy na nieliniowość f dodatkowe wzmocnione warunki typu Landesmana-Lazera [54] lub tzw. warunki znaku [5]. Zastosowane przez nas podejście polega zastosowaniu indeksu Conleya (zob. [13], [72]) do półpotoku Φ stowarzyszonego z równaniem różniczkowym

$$u_t = \Delta u - V(x)u + \lambda u + f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Niezbędne zwartości dla Φ otrzymujemy wykorzystując zwartości włożeń odpowiednich przestrzeni Sobolewa na zbiorach ograniczonych oraz adaptując metody z [69], które pozwalają nam na znajdowanie oszacowań restrykcji rozwiązań $\|(1 - \phi_n)u(t)\|_{L^2}$, gdzie ϕ_n jest funkcją charakterystyczną kuli $B(0, n^2)$.

5.1.4 Zbiory niezmiennicze dla układów równań w rezonansie: praca S10

W pracy [S10] badamy dynamikę układów równań postaci

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -Au(t) + f(x, u(t), \nabla u(t)), & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.4)$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i ograniczonym, zaś $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem lokalnie Lipschitzowskim. Ponadto A jest operatorem liniowym danym wzorem

$$Au := (A_1u_1, \dots, A_mu_m) + (\lambda_1u_1, \dots, \lambda_mu_m), \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ są liczbami rzeczywistymi oraz

$$A_k u_k := - \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_i(a_k^{ij} D_j u_k), \quad u_k \in C^2(\bar{\Omega}),$$

jest symetrycznym i eliptycznym operatorem różniczkowym dla dowolnego $1 \leq k \leq m$. Zakładamy również, że układ równań (5.4) znajduje się w rezonansie w nieskończoności co oznacza, że dla dowolnego $1 \leq k \leq m$ spełniony jest warunek

$$\text{Ker}(\lambda_k I - A_k) \neq \{0\} \text{ oraz odwzorowanie } f_k \text{ jest ograniczone.}$$

Nowością w pracy [S10] jest sformułowanie *warunków rezonansowych* dla nieliniowych pól wektorowych $f = (f_1, \dots, f_m)$. Do tej pory podobne warunki były rozważane jedynie dla zaburzeń o wartościach skalarnych. Ponadto, warunki rezonansowe zależne są od parametrów $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in [0, 1]$, które mierzą siłę rezonansu dla każdej ze składowych odwzorowania f . W szczególności, w przypadku $m = 1$, parametrowi $\sigma_1 = 1$ odpowiadają z warunki z silnym rezonansem [5], zaś dla $\sigma_1 = 0$ otrzymujemy klasyczne warunki Landesmana-Lazera [54]. Głównymi wynikami pracy [S10] są wzory wyrażające indeks Conleya zbioru niezmienniczego złożonego ze wszystkich rozwiązań ograniczonego układu (5.4), w zależności od wprowadzonych warunków rezonansowych dla odwzorowania f . Wnioskiem z otrzymanych wzorów są między innymi kryteria na istnienie rozwiązań łączących punkty stacjonarne dla układu (5.4).

5.1.5 Dynamika równań autonomicznych w rezonansie: prace S5, S6, S9

Powyższe prace są częścią projektu, w którym badaliśmy dynamikę równania pierwszego rzędu

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + \lambda u(t) + F(u(t)), \quad t > 0 \quad (5.5)$$

oraz silnie tłumionego równania drugiego rzędu

$$\ddot{u}(t) = -Au(t) - cA\dot{u}(t) + \lambda u(t) + F(u(t)), \quad t > 0, \quad (5.6)$$

gdzie λ jest liczbą rzeczywistą, $A : X \supset D(A) \rightarrow X$ jest operatorem wycinkowym ze zwartymi rezolwentami na przestrzeni Banacha X oraz $F : X^\alpha \rightarrow X$ jest odwzorowaniem lokalnie Lipschitzowskim określonym na przestrzeni ułamkowej stowarzyszonej z operatorem A (zob. [44], [64]). Ponadto w równaniu (5.6) parametr $c > 0$ jest współczynnikiem tłumienia. Zakładamy, że jesteśmy w sytuacji rezonansu w nieskończoności, czyli

$$\text{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\} \quad \text{oraz} \quad F \text{ jest odwzorowaniem ograniczonym.} \quad (5.7)$$

Praca [S5] poświęcona jest równaniu (5.5), które zgodnie z założeniami, generuje półpotok Φ działający na przestrzeni X^α . Nasze podejście polega na wykorzystaniu rozkładu spektralnego operatora A , do wprowadzenia *rezonansowych warunków geometrycznych* dla odwzorowania F ,

które są abstrakcyjnym uogólnieniem warunków Landesmana-Lazera [54] oraz warunków z silnym rezonansem [5]. Głównym wynikiem są wzory indeksowe, które wyrażają indeks Conleya (zob. [13], [72]) zbioru niezmienniczego półpotoku Φ na dostatecznie dużej kuli, w zależności od wprowadzonych wcześniej warunków geometrycznych. Konsekwencją otrzymanych wzorów są kryteria rozstrzygające istnienie orbit łączących punkty stacjonarne dla równania (5.5). Warto wspomnieć, że podobne zagadnienia były rozważane w pracach [71], [73], gdzie problem istnienia orbit łączących punkty stacjonarne był badany w sytuacji braku rezonansu w nieskończoności.

W pracy [S9] zajmujemy się badaniem dynamiki równaniem drugiego rzędu (5.6). Zauważmy, że możemy zapisać je w następującej postaci

$$\dot{w}(t) = -\mathbf{A}w(t) + \mathbf{F}(w(t)), \quad t > 0, \quad (5.8)$$

gdzie $\mathbf{A} : \mathbf{E} \supset D(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{E}$ jest operatorem liniowym na przestrzeni $\mathbf{E} := X^\alpha \times X$ danym jako

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A}) &:= \{(x, y) \in \mathbf{E} \mid x + cy \in D(A)\} \\ \mathbf{A}(x, y) &:= (-y, A(x + cy) - \lambda x) \quad \text{dla } (x, y) \in D(\mathbf{A}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

oraz $\mathbf{F} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ jest odwzorowaniem danym wzorem $\mathbf{F}(x, y) := (0, F(x))$ dla $(x, y) \in \mathbf{E}$. Nowością pracy [S9] są rezonansowe warunki geometryczne dla równań drugiego rzędu, które zostały sformułowane przy użyciu rozkładu spektralnego operatora A . Podobnie jak ma to miejsce w pracy [S5], warunki te są spełnione w przypadku, gdy F jest operatorem Niemyckiego pochodzącym od funkcji spełniającej warunki Landesmana-Lazera lub warunki z silnym rezonansem. Niech $\Phi : [0, \infty) \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ będzie półpotokiem stowarzyszonym z równaniem (5.8) oraz niech K_∞ będzie zbiorem niezmienniczym złożonym z jego wszystkich rozwiązań ograniczonych. Głównym wynikiem pracy są wzory indeksowe wyrażające indeks Conleya zbioru K_∞ w zależności od wprowadzonych warunków geometrycznych. W szczególności indeks ten okazuje się być zawsze homotopijnie nietrywialny co oznacza, że zbiór K_∞ jest niepusty. Trudnością pojawiającą się w jego dowodzie jest uzyskanie odpowiednich zwartości dla półpotoku Φ , które są niezbędne do zastosowania indeksu Conleya. Znajdujemy je przez odpowiednie oszacowania dla miar niezwarłości trajektorii półpotoku Φ , wykorzystując przy tym założenie o zwartości rezolwent operatora A . Konsekwencją uzyskanych wzorów indeksowych są kryteria na istnienie rozwiązań łączących punkty stacjonarne dla równania (5.6).

Powyższe wyniki dla równań pierwszego i drugiego rzędu zostały opisane również w pracy [S6], która jest artykułem przeglądowym zamieszczonym w materiałach pokonferencyjnych.

5.1.6 Zagadnienia okresowe dla równań w rezonansie: prace S3, S4, S7

W pracy [S3] zajmujemy się szukaniem rozwiązań T -okresowych dla równań nieautonomicznych

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + \lambda u(t) + F(t, u(t)), \quad t > 0, \quad (5.10)$$

gdzie λ jest liczbą rzeczywistą, $A : X \supset D(A) \rightarrow X$ jest operatorem liniowym takim, że $-A$ generuje zwartą C_0 półgrupę na przestrzeni Banacha X oraz $F : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem lokalnie Lipschitzowskim. Zakładamy również, że jesteśmy w sytuacji rezonansu, czyli spełniony jest warunek (5.7). Mając dany dowolny punkt $x \in X$, założmy, że $u(t; x)$ jest rozwiązaniem równania (5.10) takim, że $u(0; x) = x$. Wówczas T -okresowe rozwiązania równania (5.10) odpowiadają punktom stałym operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii, zwanego również operatorem Poincaré, który dany jest wzorem $\Phi_T(x) := u(T; x)$. Zastosowana w [S3] metoda polega na rozważaniu parametryzowanej przez $\varepsilon \in (0, 1]$ rodziny równań różniczkowych

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + \lambda u(t) + \varepsilon F(t, u(t)), \quad t > 0,$$

która wyznacza rodzinę operatorów przesunięcia wzdłuż trajektorii $\{\Phi_T^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ określoną na przestrzeni X . Oznaczając $N := \text{Ker}(\lambda I - A)$, definiujemy uśrednienie zaburzenia nieliniowego jako

$$g(x) := \int_0^T PF(s, x) ds, \quad x \in N,$$

gdzie P jest odpowiednim rzutem na przestrzeń N . Głównym wynikiem pracy [S3] jest *rezonansowa zasada uśredniania*, która mówi, że jeśli $W \subset X$ jest zbiorem otwartym oraz g nie posiada miejsc zerowych na brzegu $\partial_N(W \cap N)$, to dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ spełniona jest równość

$$\text{deg}_{\text{LS}}(I - \Phi_T^\varepsilon, W) = (-1)^{\mu + \dim \ker N} \text{deg}_{\text{B}}(g, W \cap N), \quad (5.11)$$

gdzie deg_{LS} jest stopniem Leray-Schaudera dla pełnociągłych pól wektorowych, zaś deg_{B} jest stopniem topologicznym Brouwera (zob. [27], [56]). Otrzymana zasada uśredniania została zastosowana do dowodu istnienia rozwiązań T -okresowych dla równania (5.10) przy założeniu, że F jest operatorem Niemyckiego pochodzącym od funkcji spełniającej warunki Landesmana-Lazera (zob. [54]). Mówiąc dokładniej, pokazaliśmy istnienie kuli $W := B(0, R) \subset X$ o dostatecznie dużym promieniu $R > 0$ takiej, że odwzorowanie Φ_T^ε nie posiada punktów stałych na jej brzegu dla wszystkich $\varepsilon \in (0, 1]$ oraz stopień Brouwera znajdujący się po prawej stronie równania (5.11) jest nietrywialny. Wówczas homotopijna niezmienniczość stopnia implikuje istnienie punktów stałych operatora Poincaré Φ_T , a więc istnienie rozwiązań T -okresowych równania (5.10).

Kontynuację powyższych badań stanowi praca [S4], w której zajmujemy się równaniem (5.10) przy dodatkowym założeniu, że A jest operatorem wycinkowym, zaś $F : [0, \infty) \times X^\alpha \rightarrow X$, gdzie $\alpha \in [0, 1)$, jest odwzorowaniem lokalnie Lipschitzowskim określonym na przestrzeni ułamkowej X^α wyznaczonej przez operator A . Wówczas operator przesunięcia wzdłuż trajektorii Φ_T stowarzyszony z równaniem (5.10) jest również określony na przestrzeni X^α . Głównym wynikiem pracy [S4] są wzory indeksowe wyrażające stopień Leray-Schaudera operatora $I - \Phi_T$ na dostatecznie dużej kuli, w zależności od rezonansowych warunków geometrycznych dla nieliniowego zaburzenia F , które były rozważane w pracy [S5] w kontekście równań autonomicznych. Otrzymane wzory indeksowe zapewniają nietrywialność stopnia topologicznego operatora $I - \Phi_T$ i tym samym istnienie rozwiązań T -okresowych dla (5.10).

W pracy [S7] badamy silnie tłumione równanie drugiego rzędu

$$\ddot{u}(t) = -Au(t) - cA\dot{u}(t) + \lambda u(t) + F(t, u(t)), \quad t > 0, \quad (5.12)$$

gdzie λ jest liczbą rzeczywistą, $c > 0$ jest współczynnikiem tłumienia, A jest operatorem wycinkowym o zwartych rezolwentach, zaś $F : [0, \infty) \times X^\alpha \rightarrow X$ jest odwzorowaniem lokalnie Lipschitzowskim. W dalszym ciągu zakładamy, że jesteśmy w sytuacji rezonansu w nieskończoności, czyli spełniony jest warunek (5.7). Zaczynamy od zapisania (5.12) w postaci układu równań

$$\dot{w}(t) = -\mathbf{A}w(t) + \mathbf{F}(t, w(t)), \quad t > 0, \quad (5.13)$$

gdzie \mathbf{A} jest dane wzorem (5.9) oraz $\mathbf{F}(t, (x, y)) = (0, F(t, x))$ dla $(x, y) \in \mathbf{E} := X^\alpha \times X$ oraz $t \geq 0$. Niech $\Phi_T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ będzie operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii dla (5.13). Głównymi wynikami pracy [S7] są wzory indeksowe dla rozwiązań okresowych, które wyrażają stopień topologiczny dla kondensującego pola wektorowego $I - \Phi_T$ na kuli o dostatecznie dużym promieniu, w zależności od rezonansowych warunków geometrycznych dla równań drugiego rzędu z pracy [S9]. Fakt, że operator Φ_T jest kondensujący względem miary niezwartości Hausdorffa jest konsekwencją założeń dotyczących zwartości rezolwent operatora A . Otrzymane wzory indeksowe zapewniają istnienie punktów stałych dla operatora Poincaré i tym samym istnienie rozwiązań okresowych dla równania (5.12).

5.1.7 Ogólna zasada uśredniania dla równań ewolucyjnych: prace S1, S2, S8

W pracy [S1] rozważamy rodzinę równań różniczkowych

$$\dot{u}(t) = -\lambda Au(t) + \lambda F(t, u(t)), \quad t > 0, \quad (5.14)$$

gdzie $\lambda \in (0, 1]$ jest parametrem, $A : X \supset D(A) \rightarrow X$ jest operatorem liniowym na przestrzeni Banacha X takim, że $-A$ generuje C_0 półgrupę kontrakcji w wykładniku $-\omega < 0$. Ponadto F jest odwzorowaniem kondensującym względem miary niezwartości Hausdorffa ze współczynnikiem $k \in [0, \omega)$. Mając dane $T > 0$ oraz $\lambda \in (0, 1]$, niech $\Phi_T^\lambda : X \rightarrow X$ będzie operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonym z (5.14) oraz niech

$$\widehat{F}(x) := \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau, x) d\tau, \quad x \in X,$$

będzie uśrednieniem odwzorowania F . Zakładając, że $U \subset X$ jest zbiorem otwartym i ograniczonym takim, że odwzorowanie $-A + \widehat{F}$ nie posiada miejsc zerowych na $\partial U \cap D(A)$, skonstruowaliśmy stopień topologiczny Deg dla kondensujących zaburzeń generatorów półgrup kontraktywnych, a następnie udowodniliśmy ogólną *zasadę uśredniania*, która mówi, że dla dostatecznie małych $\lambda > 0$ spełniona jest równość

$$\text{deg}_C(I - \Phi_T^\lambda, U) = \text{Deg}(-A + \widehat{F}, U),$$

gdzie deg_C jest stopniem topologicznym dla pól kondensujących (see [61], [62]). Uzyskane wyniki zostały zastosowane do dowodu istnienia rozwiązań okresowych dla równań linii transmisyjnych. Otrzymane wyniki nawiązują do badań prowadzonych w [32],[33], gdzie ogólna zasada uśredniania była dowodzona w przypadku potoku określonego na skończonej wymiarowej rozmiarowości, oraz do wyników z [17], [18], gdzie zasada ta została pokazana przy założeniu, że A jest generatorem zwartej C_0 półgrupy lub operatorem m -akretywnym o zwartych rezolwentach.

W pracy [S2] zajmowaliśmy się rodziną (5.14), w której operator $-A$ został zastąpiony przez zależną od czasu rodziną operatorów liniowych $\{A(t)\}_{t \geq 0}$, z których każdy generuje C_0 półgrupę kontrakcji ze wspólnym wykładnikiem $-\omega < 0$, zaś F jest jak poprzednio odwzorowaniem kondensującym ze współczynnikiem $k \in [0, \omega)$. Dodatkowym utrudnieniem był fakt, że dziedziny poszczególnych operatorów liniowych mogły być zależne od czasu. Zaproponowaliśmy założenia pozwalające na zdefiniowanie operatora \widehat{A} uśredniającego rodzinę $\{A(t)\}_{t \geq 0}$, a następnie pokazaliśmy, że jeśli $U \subset X$ jest zbiorem otwartym i ograniczonym takim, że odwzorowanie $\widehat{A} + \widehat{F}$ nie posiada miejsc zerowych na zbiorze $\partial U \cap D(\widehat{A})$, to

$$\text{deg}_C(I - \Phi_T^\lambda, U) = \text{Deg}(\widehat{A} + \widehat{F}, U),$$

dla dostatecznie małych $\lambda > 0$. Otrzymane rezultaty zastosowaliśmy do znalezienia rozwiązań okresowych dla równania falowego ze słabym tłumieniem, które zależne jest od czasu.

W pracy [S8] zajmowaliśmy się rodziną równań (5.14), w którym A jest operatorem wycinkowym ze zwartymi rezolwentami, zaś $F : [0, +\infty) \times X^\alpha \rightarrow X$ jest odwzorowaniem ciągłym zdefiniowanym na przestrzeni ułamkowej X^α stowarzyszonej z operatorem A . Pokazaliśmy, że jeśli zbiór otwarty $U \subset X^\alpha$ jest taki, że $0 \notin (-A + \widehat{F})(\partial U \cap D(A))$, to dla małych $\lambda > 0$ mamy

$$\text{deg}_{LS}(I - \Phi_T^\lambda, U) = \text{deg}_\alpha(-A + \widehat{F}, U),$$

gdzie deg_{LS} jest stopniem Leray-Schaudera na przestrzeni X^α , zaś $\text{deg}_\alpha(-A + \widehat{F}, U)$ jest odpowiednio skonstruowanym stopniem topologicznym na skali przestrzeni ułamkowych. Nowym pomysłem wykorzystanym w dowodzie jest regularyzacja odwzorowania F za pomocą półgrupy generowanej przez operator A . Otrzymane wyniki zostały zastosowane do znalezienia rozwiązań T -okresowych dla nieliniowych równań parabolicznych, w którym zaburzenie jest operatorem Niemyckiego dla zależnego od gradientu odwzorowania nieliniowego.

5.2 Granty i projekty badawcze

1. Kierownik i główny wykonawca grantu Iuventus Plus przyznanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego na realizację projektu badawczego *Wpływ efektów dyspersyjnych na powstawanie osobliwości w równaniach Kortewega-de Vriesa i Eulera*, numer grantu: 0338/IP3/2016/74, okres realizacji: 10.2016–10.2020.
2. Kierownik i główny wykonawca grantu Preludium przyznanego przez Narodowe Centrum Nauki na realizację projektu badawczego *Dynamika nieliniowych równań ewolucyjnych w rezonansie*, numer grantu: 2011/01/N/ST1/05245, okres realizacji: 12.2011–12.2013.
3. Wykonawca w grantie Opus 5, Narodowe Centrum Nauki, *Dynamika nieliniowych równań ewolucyjnych - podejście topologiczne*, kierownik: Prof. dr hab. Wojciech Kryszewski, okres realizacji: 02.2014–02.2017.
4. Wykonawca w grantie Komitetu Badań Naukowych, *Niezmienniki topologiczne w analizie nieliniowej*, kierownik: Prof. dr hab. Lech Górniewicz, okres realizacji: 2009–2012.
5. Grant Wydziału Matematyki i Informatyki UMK na finansowanie zadania badawczego *Metody topologiczne i wariacyjne w teorii równań różniczkowych cząstkowych i zwyczajnych*, okres realizacji: 05.2016–12.2016.

5.3 Nagrody i wyróżnienia

- Jednorazowe stypendium Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za wysoko punktowaną publikację naukową: *Double spiral singularities for a flow related with the 2D Euler equation*. Nagroda przyznana 4.10.2021.
- Indywidualna Nagroda III stopnia Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za osiągnięcia naukowe w 2020 roku. Nagroda przyznana 25.06.2021.
- Jednorazowe stypendium Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za wysoko punktowaną publikację naukową: *On global dynamics of reaction-diffusion systems at resonance*. Nagroda przyznana 25.05.2020.
- Stypendium postdoktorskie *Wzmocnienie potencjału Dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych*, okres realizacji 1.10.2014–30.09.2015.
- Stypendium START Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w roku akademickim 2014/15.
- Stypendium Ministra Edukacji Narodowej za osiągnięcia w roku akademickim 2006/07, 2007/08, 2008/09.

5.4 Opieka naukowa nad młodymi matematykami

- Promotor pomocniczy oraz współopiekun naukowy doktoranta mgr. Władysława Klinikowskiego od października 2019 roku na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika.
- Promotor pracy licencjackiej (2018) oraz magisterskiej (2020) mgr. Kamila Dunsta na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika (2 wspólne prace).

5.5 Inna działalność

Poza referatami przedstawionymi w „Wykazie osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny” wygłosiłem również referaty na seminariach naukowych:

- Instytutu Matematycznego PAN,
- Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski,
- Wydziału Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie,

- Instytutu Matematyki, Uniwersytet Wrocławski,
- Wydziału Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika.

6 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni lub instytucji naukowej

1. Stypendium badawcze *postdok*

Stypendium badawcze *postdok* zostało mi przyznane w ramach programu „Wzmocnienie potencjału Dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych” i było realizowane w instytucie Basque Center for Applied Mathematics (BCAM) w Bilbao, Hiszpania w okresie 1.10.2014–30.09.2015. Opiekunem naukowym stażu był Prof. dr Luis Vega. W trakcie tego wyjazdu zainteresowałem się matematyką związaną z problemem Riemanna-Hilberta dla równania Painlevé II, która dała podstawy do napisania publikacji [H1], [H2], [H3].

2. Pobyt naukowy w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk (IMPAN) w Warszawie w dniach 21–25.06.2021, 12–16.07.2021 oraz 02–06.08.2021. Osobą zapraszającą był dr hab. Tomasz Cieślak. W wyniku trójstronnej współpracy wraz z Wojciechem Ożańskim (Florida State University) powstały publikacje [H4] oraz [H5].
3. Warszawa, Polska, 25–29.07.2022, pobyt naukowy w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk (IMPAN), osoba zapraszająca: dr hab. Tomasz Cieślak. W wyniku dalszej trójstronnej współpracy z Wojciechem Ożańskim powstała publikacja [S12].
4. Grant Amerykańskiego Instytutu Matematycznego (AIM) na udział w warsztatach *Small scale dynamics in incompressible fluid flows*, Pasadena, USA w dniach 6–10.11.2023.

7 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

7.1 Działalność dydaktyczna

- Prowadzenie wykładu monograficznego dla doktorantów pt. *Metody analizy harmonicznej w równaniach dyspersyjnych* na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w roku akademickim 2016/17.
- Prowadzenie seminarium magisterskiego na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w roku akademickim 2019/20.
- Prowadzenie ćwiczeń na studiach licencjackich i magisterskich na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK, między innymi z analizy matematycznej, równań różniczkowych cząstkowych, teorii mnogości, geometrii, topologii, matematyki komputerowej, w latach 2012–teraz.
- Recenzje 5 prac magisterskich i 4 prac licencjackich z matematyki na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK.
- Warsztaty pt. „O krzywych w matematyce” dla stypendystów Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci: prowadzenie dwóch wykładów pt. *Indeks odwzorowania zmiennej zespolonej względem krzywej zamkniętej* oraz *Zagadnienie brachistochrony jako przykład zastosowania rachunku wariacyjnego*, 02–04.12.2011, Toruń, Polska.

7.2 Działalność organizacyjna

- Członek komitetu organizacyjnego konferencji *Patterns in solutions to the incompressible Euler equation*, 4–9.07.2024, Będlewo, Polska.
- Członek komitetu organizacyjnego konferencji *VIII Symposium on Nonlinear Analysis.*, 17–21.06.2024, Toruń, Polska

- Członek komitetu organizacyjnego warsztatów Schauder Winter School *Geometric and Topological Methods in Dynamics of PDEs*, 13–15.02.2023, Toruń, Polska.
- Członek komitetu organizacyjnego konferencji *VII Symposium on Nonlinear Analysis*, 14–18.09.2015, Toruń, Polska.

Literatura

- [1] M.J. Ablowitz, H. Segur, *Asymptotic solutions of the Korteweg-deVries equation*, Studies in Appl. Math. **57** (1976/77), no. 1, 13–44.
- [2] S. Alinhac, *Remarques sur l'instabilité du problème des poches de tourbillon*, J. Funct. Anal. **98** (1991), pp. 361–379.
- [3] J. Baik, R. Buckingham, J. DiFranco, *Asymptotics of Tracy-Widom distributions and the total integral of a Painlevé II function*, Comm. Math. Phys. **280** (2008), no. 2, 463–497.
- [4] J. Baik, R. Buckingham, J. DiFranco, A. Its, *Total integrals of global solutions to Painlevé II*, Nonlinearity **22** (2009), no. 5, 1021–1061.
- [5] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with “strong” resonance at infinity*, Nonlinear Anal. **7** (1983), 981–1012.
- [6] H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, NY, 1953.
- [7] A.L. Bertozzi, P. Constantin, *Global regularity for vortex patches*, Comm. Math. Phys. **152** (1993), no. 1, 19–28.
- [8] R. Betchov, *On the curvature and torsion of an isolated vortex filament*, J. Fluid Mech. **22**, (1965), 471.
- [9] J.Y. Chemin, *Persistence de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **26** (1993), no. 4, 517–542.
- [10] T. Claeys, A.B. Kuijlaars, M. Vanlessen, *Multi-critical unitary random matrix ensembles and the general Painlevé II equation*, Ann. of Math. (2) **168** (2008), no. 2, 601–641.
- [11] P.A. Clarkson, J.B. McLeod, *A connection formula for the second Painlevé transcendent*, Arch. Rational Mech. Anal. **103** (1988), no. 2, 97–138.
- [12] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on \mathbb{R} and \mathbb{T}* , J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 3, 705–749.
- [13] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [14] P. Constantin, E.S. Titi, *On the evolution of nearly circular vortex patches*, Commun. Math. Phys. **119**, 177–198 (1988).
- [15] S. Correia, R. Côte, *Sharp blow-up stability for self-similar solutions of the modified Korteweg-de Vries equation*, arXiv:2402.16423.
- [16] S. Correia, R. Côte, L. Vega, *Asymptotics in Fourier space of self-similar solutions to the modified Korteweg–de Vries equation*, J. Math. Pures Appl. **137** (9) (2020), 101–142.
- [17] A. Ćwiszewski, *Topological degree methods for perturbations of operators generating compact C_0 semigroups*, Journal of Differential Equations, **220** (2006), 434–477.

- [18] A. Ćwiszewski, *Degree theory for perturbations of m -accretive operators generating compact semigroups with constraints*, Journal of Evolution Equations, **7** (2007), 1–33.
- [19] L.S. Da Rios, *On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape*, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), 117-135
- [20] D. Dai, W. Hu, *Connection formulas for the Ablowitz-Segur solutions of the inhomogeneous Painlevé II equation*, Nonlinearity **30** (2017), no. 7, 2982–3009.
- [21] D. Dai, X. Shuai-Xia, Z. Lun, *On integrals of the tronquée solutions and the associated Hamiltonians for the Painlevé II equation*, preprint arXiv:1908.01532
- [22] G.S. Deem, N.J. Zabusky, *Vortex Waves: Stationary V -states Interactions, Recurrence, and Breaking*, Phys. Rev. Lett. **40**, (1978).
- [23] P. Deift, X. Zhou, *A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation*, Ann. of Math. **137** (1993), no. 2, 295–368.
- [24] P. Deift, X. Zhou, *Asymptotics for the Painlevé II equation*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), no. 3, 277–337.
- [25] P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 3. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [26] A. Dorsey, C. Wexler, *Contour dynamics, waves and solitons in the quantum Hall effect*, Phys. Rev. B, **60**, no. 15, (1999), 10971–10983.
- [27] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed Point Theory*, Springer, Berlin 2004.
- [28] V. Elling, M.V. Gnann, *Variety of unsymmetric multibranching logarithmic vortex spirals*, European J. Appl. Math. **30** (2019), no. 1, 23–38.
- [29] H. Flaschka, A.C. Newell, *Monodromy- and spectrum-preserving deformations I*, Comm. Math. Phys. **76** (1980), no. 1, 65–116.
- [30] A.S. Fokas, A.R. Its, A. Kapaev, V. Novokshenov, *Painlevé transcendents. The Riemann-Hilbert approach*, Mathematical Surveys and Monographs, 128. American Mathematical Society, RI, 2006.
- [31] G. Fonseca, F. Linares, G. Ponce, *Global well-posedness for the modified Korteweg-de Vries equation*, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), no. 3-4, 683–705.
- [32] M. Furi, M. P. Pera, *Global bifurcation of fixed points and the Poincaré translation operator on manifolds*, Annali di Matematica pura ed applicata, **173** (1997), 313–331.
- [33] M. Furi, M.P. Pera, *A continuation principle for forced oscillations on differentiable manifolds*, Pacific Journal of Mathematics, **121** (1986), 321–338.
- [34] R.E. Goldstein, D.M. Petrich, *Solitons, Euler’s equation, and vortex patch dynamics*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), no. 4, 555–558.
- [35] R.E. Goldstein, D.M. Petrich, *Solitons, Euler’s Equation, and the Geometry of Curve Motion, Singularities in Fluids, Plasmas and Optics*, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Series: NATO Science Series C, Vol. 404 (1993), 93-109
- [36] V. Gromak, I. Laine, S. Shimomura, *Painlevé differential equations in the complex plane*, De Gruyter Studies in Mathematics, 28. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2002.

- [37] A. Grünrock, *An improved local well-posedness result for the modified KdV equation*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 61, 3287–3308.
- [38] A. Grünrock, L. Vega, *Local well-posedness for the modified KdV equation in almost critical \widehat{H}_s^r -spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 11, 5681–5694.
- [39] Z. Guo, *Global well-posedness of Korteweg-de Vries equation in $H^{-3/4}(\mathbb{R})$* , J. Math. Pures Appl. (9) **91** (2009), no. 6, 583–597.
- [40] S. Gutierrez, L. Vega, *Self-similar solutions of the localized induction approximation: singularity formation*, Nonlinearity **17** (2004), no. 6, 2091–2136.
- [41] S. Gutiérrez, J. Rivas, L. Vega, *Formation of singularities and self-similar vortex motion under the localized induction approximation*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), no. 5-6, 927–968.
- [42] S.P. Hastings, J.B. McLeod, *A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg-de Vries equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **73** (1980), no. 1, 31–51.
- [43] H. von Helmholtz, *Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen*, Monatsberichte d. königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin (1868), 215–228.
- [44] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer Verlag, 1981.
- [45] I.N. Herstein, *Topics in algebra*. Second edition. Xerox College Publishing, Lexington, Mass.-Toronto, Ont., 1975.
- [46] P. Hislop, I. Sigal, *Introduction to Spectral Theory. With Applications to Schrödinger Operators*, Springer-Verlag 1996.
- [47] F. de la Hoz, *Numerical study of a flow of regular planar curves that develop singularities at finite time*, SIAM J. Appl. Math. **70** (2009), no. 9, 279–301.
- [48] A.R. Its, A.A. Kapaev, *Quasi-linear Stokes phenomenon for the second Painlevé transcendent*, Nonlinearity **16** (2003), no. 1, 363–386.
- [49] M. Jimbo, M. Tetsuji, K. Ueno, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients*, Physica D **2** (1981), no. 2, 306–362.
- [50] T. Kakutani, N. Yamasaki, *Solitary Waves on a Two-Layer Fluid*, Journal of the Physical Society of Japan **45** (2) (1978), 674–679.
- [51] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [52] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), no. 4, 527–620.
- [53] D.J. Korteweg, G. de Vries, *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves*, Phil. Mag., **39** (1895), pp. 422–443.
- [54] E.M. Landesman, A.C. Lazer, *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech. **19** (1969/1970), 609–623.
- [55] F. Lindemann, *Ueber die Zahl π* , Math. Ann. **20** (1882), no. 2, 213–225.

- [56] N.G. Lloyd, *Degree Theory*, University Press, Cambridge, 1978.
- [57] Lord Kelvin, *Nature (London)* 50, 524, 549, 573, 1894.
- [58] A.J. Majda, A.L. Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [59] B.M. McCoy, S. Tang, *Connection formulae for Painlevé functions*, *Physica D* **18** (1986), 190–196.
- [60] P.D. Miller, *On the increasing tritonqué solutions of the Painlevé-II equation*, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **14** (2018), Paper No. 125, 38.
- [61] R.D. Nussbaum, *Degree theory for local condensing maps*, *J. Math. Anal. Appl.* **37** (1972), 741–766.
- [62] R.D. Nussbaum, *The fixed point index for local condensing maps*, *Ann. Mat. Pura Appl.* **89** (1971), no. 4, 217–258.
- [63] P. Painlevé, *Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme*, *Acta Math.*, **25** (1902) no. 1, 1–85.
- [64] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag, 1983.
- [65] E. Pelinovsky, O. Polukhina, A. Slunyaev, T. Talipova, *Internal solitary waves*, Solitary waves in fluids, Adv. Fluid Mech. 47, WIT Press, Southampton, 2007.
- [66] G. Perelman, L. Vega, *Self-similar planar curves related to modified Korteweg-de Vries equation*, *J. Differential Equations* 235 (2007), no. 1, 56–73.
- [67] A. Persson, *Bounds for the discrete part of the spectrum of the semi-bounded Schrödinger operator*, *Math. Scand.* **8** (1960), 143–154.
- [68] L. Prandtl, *Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik*, Innsbruck (1922), pp. 18–33.
- [69] M. Prizzi, *On admissibility of parabolic equations in \mathbb{R}^N* , *Fund. Math.* **176** (2003), 261–275.
- [70] B. Protas, S. G. Llewellyn Smith, T. Sakajo, *Finite rotating and translating vortex sheets*, *Journal of Fluid Mechanics* **923**, (2021), article number: 23.
- [71] K.P. Rybakowski, *Trajectories joining critical points of nonlinear parabolic and hyperbolic partial differential equations*, *J. Differential Equations* **51** (1984), no. 2, 182–212.
- [72] K. P. Rybakowski, *The homotopy index and partial differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [73] K. P. Rybakowski, *Nontrivial solutions of elliptic boundary value problems with resonance at zero*, *Ann. Mat. Pura Appl.* **139** (1985), 237–277.
- [74] P. G. Saffman, *Vortex dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
- [75] B. Simon, *Schrödinger semigroups*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 447–526.
- [76] T. Tao, *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*, CBMS regional series in mathematics, 2006.

- [77] C.A. Tracy, H. Widom, *Level-spacing distributions and the Airy kernel*, Communications in Mathematical Physics, **159** (1994) no. 1, 151–174.
- [78] T. Trogdon, S. Olver, *Riemann-Hilbert problems, their numerical solution, and the computation of nonlinear special functions*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2016.
- [79] L. Vega, *The dynamics of vortex filaments with corners*, Commun. Pure Appl. Anal., **14** (2015) no. 4, 1581–1601.
- [80] N.J. Zabusky, M.H. Hughes, K.V. Roberts, *Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions*, J. Comput. Phys. **30** (1979), no. 1, 96–106.
- [81] X. Zhou, *The Riemann-Hilbert problem and inverse scattering* SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), no. 4, 966–986.