Kraków, 30 marca 2023

dr hab. Maciej Dołęga

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

mdolega@impan.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Mikołaja Marciniaka
pt. *Dynamic asymptotic cobinatorics*

Wstęp

Tematyka rozprawy doktorskiej mgra Mikołaja Marciniaka leży na styku dwóch dziedzin: kombinatoryki algebraicznej oraz probabilistyki. Wpisuje się ona w młody, prężnie rozwijający się obszar badań w którym, oględnie mówiąc, bada się asymptotyczne własności różnorodnych dyskretnych struktur zazwyczaj wywodzących się z takich dziedzin jak teoria reprezentacji, kombinatoryka, bądź fizyka statystyczna. Częstym schematem pojawiającym się w tej tematyce jest znalezienie odpowiednich funkcji opisujących badaną asymptotykę modelu, a następnie wykazanie że ta asymptotyka zachowuje się w kontrolowany przez nas sposób. Pierwsza część tego zadania niewątpliwie wymaga dobrej intuicji oraz biegłości w teorii prawdopodobieństwa, lecz bywa ona dość schematyczna, natomiast część druga zwykle wymaga kreatywności która pozwala skonstruować i zbadać kombinatoryczną strukturą badanych funkcji, co stanowi klucz do opisania pożądanej asymptotyki. Dysertacja mgra Marciniaka wpasowuje się w ten schemat. Większa część rozprawy poświęcona jest badaniom asymptotycznego zachowania algorytmu RSK i autor używa kombinatorycznych metod oraz bada i opisuje nowe kombinatoryczne struktury. Algorytm RSK jest ważną konstrukcją która zadaje bijekcję pomiędzy permutacjami a parami tzw. tableaux Younga o tym samym kształcie. Jest on kluczowym narzędziem w znalezieniu postulowanych wcześniej, oraz zupełnie nowych związków między teorią reprezentacji grup permutacji, losowymi partycjami, macierzami losowymi, oraz enumeratywną geometrią, co mocno motywuje prowadzone przez mgra Marciniaka badania i osadza je w głównym nurcie współczesnych badań w tej tematyce.

Recenzowana rozprawa składa się z trzech rozdziałów właściwych poprzedzonych trzystronicowym rozdziałem zatytułowanym *Preambule*, w którym autor zasadniczo powtórzył streszczenie rozprawy, oraz opisał szczegółowo wkład własny w powstanie materiału opisanego w poszczególnych rozdziałach dysertacji. Pierwszy rozdział tożsamy jest z samodzielną pracą autora zatytułowaną “Hydrodynamic limit of the Robinson–Schensted–Knuth algorithm” i opublikowaną w czasopiśmie *Random Structures & Algorithms*, drugi jest tożsamy z kolejną, samodzielną pracą autora pt. “Quadratic coefficients of Goulden–Rattan character polynomials”, która ukazała się w *Annals of Combinatorics*, natomiast rozdział trzeci oparty jest na preprincie napisanym wspólnie z promotorem (należy nadmienić, że główne twierdzenie tego rozdziału jest autorstwa mgra Marciniaka), który można znaleźć na platformie *arXiv*.

Zanim szczegółowo przedstawię główne wyniki autora, chciałbym nadmienić że rozprawa nie zawiera żadnego rozdziału stanowiącego wprowadzenie do podejmowanej przez mgra Marciniaka tematyki badawczej (poza wspomnianym, zaledwie półtora stronicowym podrozdziałem *Summary*, który jest symbolicznym rozszerzeniem streszczenia pracy i zasadniczo je powiela). Co więcej, każdy z rozdziałów stanowi niezmienioną (lub zmiany są tak minimalne, że nie zdołałem tego zauważyć) kopię artykułów/preprintów autora (wyjątkiem jest rozdział ostatni, lecz wynika to raczej z faktu iż odpowiedni preprint ukazał się na platformie *arXiv* po napisaniu dysertacji i rozdział trzeci przypomina wstępną wersję pracy którą można znaleźć w *arXiv*). W szczególności każdy z rozdziałów zawiera wprowadzenie, które z jednej strony powiela informacje zawarte we wcześniejszych rozdziałach, a z drugiej strony jest kopią wprowadzenia do artykułu przeznaczonego dla ekspertów w dziedzinie i często nie zawiera istotnych informacji, które w mojej opini w rozprawie znaleźć się powinny. Z przykrością stwierdzam, że struktura dysertacji sugeruje że autor nie wykonał żadnego wysiłku, aby trzy różne prace składające się na treść rozprawy zostały choćby częściowo zharmonizowane i wkomponowane w większą całość i wysiłek ten ograniczył się do operacji “kopiuj-wklej” (autor nawet nie zmienił fragmentów “in this paper (...)” na “in this chapter (...)” lub “in this dissertation (...)”).

Omówienie i ocena wyników

W asymptotycznej wersji algorytmu RSK rozważanej w rozprawie, algorytm ten przypisuje ciągowi liczb rzeczywistych $(x_1, \ldots, x_n)$ parę $(P(x_1, \ldots, x_n), Q(x_1, \ldots, x_n))$ tableaux Younga o tym samym kształcie λ.

W pierwszym rozdziale autor rozważa następujący problem: co można powiedzieć o tableau $P(X_1, \ldots, X_n, w, X_{n+1}, \ldots, X_m)$, gdy $w \in [0, 1]$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą, natomiast $X_1, \ldots, X_m$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednostajnym rozkładzie na odcinku $[0, 1]$? Jest to naturalny problem, co potwierdza fakt iż został on poruszony w pracy [Duz19], jak zaznaczył mgr Marciniak. Główne twierdzenie tego rozdziału (Theorem 1.3.1) pokazuje, że istnieje pewna jawna funkcja $H\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ taka, że gdy $m = [Tn]$, wówczas (odpowiednio przeskalowana) trajektoria klatki w tableau P

zawierającej element z deterministyczną wartością w opisana jest przez funkcję $H(T)$, gdy $n \to \infty$. Zbieżność jest dość silna, mianowicie trajektoria zbiega do funkcji $H(T)$ na dowolnie długim odcinku $T \in [1, R]$ w normie supremum według prawdopodobieństwa. Autor w sprytny sposób dedukuje to twierdzenie z pracy Romika i Śniadego [RŚ15], w której badali oni położenie klatki o największej wartości w tableau $Q(X_1, \ldots, X_n, x)$, gdy $n \to \infty$, gdzie $X_1, \ldots, X_n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednostajnym rozkładzie na odcinku $[0, 1]$, a $x \in [0, 1]$ jest ustaloną liczbą. Autor zauważa, że funkcja H związana jest z funkcją G znalezioną w [RŚ15] poprzez równanie $H(T) = \sqrt{T} G(T^{-1})$ i główne idee dowodu polegają na wykorzystaniu pewnej symetrii algorytmu RSK która dobrze zachowuje się w przypadku zastosowania RSK do danych losowych i pozwala powiązać własności tableau P z własnościami tableau Q. W efekcie mgr Marciniak udowodnił interesujące i nietrywialne twierdzenie, używając szereg eleganckich argumentów co stanowi zarówno o dobrej znajomości teorii prawdopodobieństwa przez autora, jak i dogłębnym zrozumieniu kombinatorycznej natury algorytmu RSK.

Drugi rozdział delikatnie odbiega tematycznie od pozostałych dwóch rozdziałów. Dotyczy on kombinatorycznej struktury pewnych wielomianów $L_k(C_2, C_3, \ldots), k \geqslant 2$ nieskończenie wielu zmiennych $C_2, C_3, \ldots$. Wielomiany te, wprowadzone przez Gouldena i Rattana w [GR07], opisują znormalizowane charaktery nieprzywiedlnych reprezentacji grup permutacji i autorzy pracy [GR07] postawili w niej hipotezę, że współczynniki tych wielomianów są nieujemnymi liczbami wymiernymi (mgr Marciniak dodaje "o małych mianownikach", choć nie precyzuje w jakim sensie). Zasugerowali oni również, że ta (hipotetyczna) własność powinna mieć naturalną kombinatoryczną interpretację. Głównym wynikiem tego rozdziału jest dowód dodatniości bardzo szczególnego współczynnika: autor dowodzi, że współczynnik $[C_2^2]L_k$ jest dodatnią liczbą wymierną dla wszystkich $k \geqslant 2$. Muszę przyznać że rozdział ten zrobił na mnie najmniejsze wrażenie (nie należy jednak błędnie interpretować, że nie zrobił on na mnie dobrego wrażenia). Z jednej strony, autor zaatakował bardzo trudny problem — hipoteza ta otwarta jest już od przeszło piętnastu lat i po dziś dzień brakuje nawet częściowych wyników na temat struktury wielomianów Gouldena–Rattana, poza opisem części liniowej który został przedstawiony w [GR07]. Z drugiej strony, dość zawiła analiza różnych przypadków i nietrywialna konstrukcja zanurzeń różnych rodzajów map skonstruowana przez mgra Marciniaka prowadzi zaledwie do zrozumienia jednego, konkretnego współczynnika. Być może jest to kolejna przesłanka, że hipoteza to jest niezwykle trudna i na kolejne częściowe wyniki przyjdzie nam znów czekać wiele lat. Niemniej jednak, autor reklamuje swoją metodę jako potencjalne narzędzie do zrozumienia części kwadratowej wielomianów Gouldena–Rattana, po czym dość skomplikowana analiza pozwala mu zrozumieć zaledwie jeden konkretny współczynnik, co pozostawia pewien niedosyt. Nie mam natomiast absolutnie żadnych wątpliwości że praca mgra Marciniaka przedstawiony w tym rozdziale potwierdza jego biegłość w dość skomplikowanej kombinatoryce grafów zanurzonych na powierzchniach i przeprowadzone przez niego konstrukcje są pomysłowe i nietrywialne.

Rozdział trzeci zrobił na mnie z kolei największe wrażenie, a przedstawione tam wyniki uważam za niezwykle ciekawe. Jest to rozdział który został napisany wspólnie z promotorem, jednak w rozdziale *Preambule* mgr Marciniak szczegółowo wyjaśnia autorstwo poszczególnych fragmentów tego rozdziału. W szczególności główne twierdzenie, które poniżej omówię, zostało udowodnione przez mgra Marciniaka. Zacznę od opisania kontekstu: punktem wyjścia jest wspomniane już wcześniej twierdzenie Romika i Śniadego, które mówi o tym, że dla ustalonej liczby $x \in [0, 1]$, odpowiednio przeskalowane położenie klatki o największej wartości w tableau $Q(X_1, \ldots, X_n, x)$ zbiega według prawdopodobieństwa do $G(x)$, gdy $n \to \infty$, gdzie $X_1, \ldots, X_n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednostajnym rozkładzie na odcinku $[0, 1]$, a G pewną jawną funkcją. Naturalnym problemem jest pytanie o fluktuacje w pobliżu punktu granicznego. Śniady postawił w pracy [Śni20] hipotezę, że przy odpowiednim skalowaniu fluktuacje są gaussowskie, o nośniku na prostej stycznej do pewnej krzywej związanej z funkcją G. Klasyczną metodą ataku takiego problemu jest tzw. metoda momentów, która polega na zbadaniu kumulant odpowiednich zmiennych losowych i pokazaniu, że kumulanty rzędu większego niż dwa asymptotycznie znikają. Ten problem jest zazwyczaj bardzo trudny i jak wspomniałem już we Wstępie, w praktyce jego rozwiązanie sprowadza się do dostarczenia nowych narzędzi kombinatorycznych, które pozwalają opisać kumulanty jako pewne (ważone) funkcje tworzące kombinatorycznych obiektów. Główny wynik mgra Marciniaka przedstawiony w rozdziale trzecim (Theorem 3.3.2) to znalezienie eleganckiego i jawnego wzoru na kumulanty (kluczowej z punktu widzenia przedstawionych hipotez) zmiennej losowej, wyrażonego jako (ważona) funkcja tworząca nieprzecinających się alternujących drzew. Choć autor nie rozstrzygnął w swojej rozprawie (bardzo trudnych) hipotez Śniadego, to nie mam wątpliwości że jego główny wynik stanowi ważny (a być może kluczowy) krok w tym kierunku i dzięki Twierdzeniu 3.3.2 problem ten zostanie rozwiązany w niedalekiej przyszłości. Dowód tego twierdzenia łączy w sobie wiele różnorodnych elementów i potwierdza biegłość mgra Marciniaka w zakresie rachunku prawdopodobieństwa i asymptotycznej teorii reprezentacji, ale nade wszystko pokazuje duży talent mgra Marciniaka w znajdowaniu licznych kombinatorycznych związków między obiektami, które z natury kombinatoryczne nie są. W tym konkretnym przypadku autor pokazuje że pewna skomplikowana suma funkcji wymiernych, która wydaje się być zupełnie poza kontrolą, może być drastycznie uproszczona i w efekcie wyrażona jako ważona funkcja tworząca pewnych drzew z dodatkowymi dekoracjami.

Przejdę teraz do uwag krytycznych. Zasadniczo mam tylko jedną, którą nadmieniłem już we wstępie do tej recenzji i która nie dotyczy poziomu matematycznego rozprawy (wartość matematyczną dysertacji oceniam bardzo wysoko), lecz dotyczy ona sposobu prezentacji wyników. Z dużą przykrością stwierdzam, że redakcja pracy najprawdopodobniej ograniczyła się do skopiowania treści opublikowanych wcześniej (poza rozdziałem trzecim) prac, a następnie wklejeniu ich w kolejności chronologicznej w jedną całość. Brakuje tutaj choćby minimalistycznego rozdziału, który wprowadziłby czytelnika do podjętych przez autora badań, a w szczególności opisywałby bogatą historię i kontekst algorytmu RSK, który jest centralnym obiektem rozprawy. W rozdziale 1, autor poświęca zaledwie 7 linijek na opisanie tego algorytmu i kończy pisząc "A detailed description of the RSK algorithm can be found in [Rom15, Chapter 1.6]"! Następnie poświęca kolejne 11 linijek na opisanie tableau P, ale nie opisuje w ogóle tableau Q, mimo że główny pomysł dowodu twierdzenia opiera się na pewnej symetrii wymieniającej tableaux P i Q. Kolejny rozdział jest zupełnie inny tematycznie i rozdziela dwa, związane ze sobą rozdziały. Wreszcie, w rozdziale 3 znowu pojawia się wprowadzenie, które tym razem w znacznie bardziej wyczerpujący sposób opisuje algorytm RSK. Autor nie wykonał nawet minimalnego zabiegu zastąpienia zdawkowego wprowadzenie z rozdziału 1 poprzez jego bogatszy odpowiednik z rozdziału 3, który pojawia się w końcowej części rozprawy. Nota bene, z rozdziału *Preambule* dowiadujemy się, że autorem wprowadzenia z rodziału 3 nie jest jednak mgr Marciniak, lecz jego promotor. Nie będę opisywał więcej przykładów wynikających z tego minimalistycznego podejścia do redakcji, bo możnaby wymieniać bardzo długo. Myślę, że przytoczone przykłady wystarczająco obrazują to, że wysiłek włożony przez autora w prezentację rozprawy jako jednorodnego i spójnego tekstu zdaje się być bliski zeru. Szczęśliwie, ustawa *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* nie wymaga formalnej oceny sposobu prezentacji, co pozwala mi przejść do ostatniej części tej recenzji.

Podsumowanie Moje krytyczne uwagi dotyczące prezentacji wyników nie wpływają w żaden sposób na wysoką ocenę merytorycznej części rozprawy. Wyniki przedstawione w pierwszych dwóch rozdziałach już zostały opublikowane w renomowanych czasopismach naukowych jako prace samodzielne autora i nie mam wątpliwości że materiał przedstawiony w ostatnim rozdziale również zostanie w przyszłości opublikowany w bardzo dobrym czasopiśmie. Przedstawiona rozprawa świadczy o dogłębnym opanowaniu materiału i umiejętności rozwiązywania (trudnych) problemów leżących na pograniczu kombinatoryki algebraicznej i rachunku prawdopodobieństwa i w mojej opinii dysertacja mgra Mikołaja Marciniaka zatytułowana "Dynamic asymptotic combinatorics" spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Z poważaniem,

Maciej Dołęga

Maciej Wojciech Dołęga

Elektronicznie podpisany przez Maciej Wojciech Dołęga
Data: 2023.03.30 19:00:35 +02'00'