Warszawa, 13.04.2023

Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: jaroslaw.grytczuk@pw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej Mikołaja Marciniaka

Dynamic asymptotic combinatorics

Praca doktorska Mikołaja Marciniaka dotyczy kilku problemów kombinatoryki asymptotycznej o posmaku dynamicznym. W typowym problemie tej dziedziny bada się skalowane obiekty graniczne dla (generowanych losowo) ciągów skończonych struktur kombinatorycznych. Na przykład, słynne twierdzenie o "kole arktycznym" opisuje graniczny kształt losowego pokrycia kostkami domina "diamentu Azteków" (fragmentu szachownicy w kształcie rombu).

Wspólnym motywem problemów badanych w rozprawie są *tableaux Younga* i związany z nimi algorytm Robinsona-Schensteda-Knutha (w skrócie *algorytm RSK*). Algorytm ten tworzy z zadanej permutacji (lub dowolnego ciągu różnych liczb) sukcesywnie rosnące tableaux Younga (czyli wypełnione liczbami diagramy Younga) wstawiając nowy element i przesuwając odpowiednio istniejące elementy w diagramie. Dynamika tego procesu stanowi przedmiot intensywnych badań wielu wybitnych matematyków. Jest to niewątpliwie bardzo interesująca tematyka w obrębie rozległej, fascynującej dziedziny powiązanej ściśle z kombinatoryką (problem najdłuższego podciągu w permutacjach losowych), teorią reprezentacji (reprezentacje grup symetrycznych), czy teorią prawdopodobieństwa (macierze losowe).

Rozprawa doktorska Mikołaja Marciniaka składa się z trzech części stanowiących odrębne dokonania autora. Omówię je pokrótce poniżej nie wchodząc w szczegóły techniczne.

Rozdział pierwszy zawiera ciekawe twierdzenie (Theorem 1.3.1) mówiące o trajektorii ustalonej liczby podczas wykonywania algorytmu RSK dla ciągu losowego (zawierającego ową liczbę). Trajektoria zbiega jednostajnie (według prawdopodobieństwa) do pewnej krzywej (deterministycznej), której definicja bazuje na funkcji pojawiającej się w podobnym zagadnieniu badanym wcześniej przez Romika i Śniadego (również dotyczącym ewolucji tableaux Younga podczas procedury RSK). Dowód pomysłowo wykorzystuje rezultat Romika i Śniadego oraz znane własności RSK. Wynik ten został opublikowany w czasopiśmie *Random Structures and Algorithms.*

Drugi rozdział pracy dotyczy wielomianów Gouldena-Rattana—pewnych obiektów algebraicznych powiązanych z diagramami Younga poprzez reprezentacje grup symetrycznych. Wielomiany te są zdefiniowane przy pomocy wielomianów Kerova i wolnych kumulantów diagramów Younga. Hipoteza Gouldena-Rattana głosi, że, podobnie jak dla wielomianów

Kerova, współczynniki tych wielomianów są nieujemne. Główny wynik tej części rozprawy (Theorem 2.2.2) potwierdza prawdziwość hipotezy w przypadku współczynnika kwadratowego C_2^2. Dla współczynników liniowych hipoteza wynika łatwo z analogicznej własności dla wielomianów Kerova. Dowód wykorzystuje pomysłową modyfikację znanych wyników Dołęgi, Féraya i Śniadego (dających kombinatoryczne interpretacje współczynników wielomianów Kerova) oraz nową metodę "ślizgania" krawędzi. Pozwala to na wyrażenie hipotezy w języku map i w efekcie na znalezienie odpowiednich bijekcji ustanawiających nieujemność współczynników. Wynik został opublikowany w czasopiśmie *Annals of Combinatorics*.

Najbardziej zaawansowana i zarazem najdłuższa jest trzecia część rozprawy (choć stanowi ona tylko część wspólnej pracy autora i promotora opublikowanej na arXivie). Dotyczy ona własności pewnej funkcji kumulacyjnej $F_T(u_0)$ będącej zmienną losową opisującą położenie nowej komórki w losowym tableau T (ustalonego kształtu) po zastosowaniu kroku algorytmu RSK dla losowej liczby. Jest to element szerszego programu, którego centralnym punktem jest intrygujący problem (Problem 3.1.1) dotyczący izomorfizmu dwóch układów dynamicznych (chyba już rozwiązany pozytywnie), z których jeden jest określony na klasycznej przestrzeni probabilistycznej $[0,1]^\infty$ z miarą Lebesgue'a, zaś drugi na nieskończonych standardowych tableaux Younga z miarą Plancherela. Główny wynik tej części rozprawy (Theorem 3.3.2) podaje intrygujący wzór na kumulanty zmiennej losowej $F_T(u_0)$, w którym pojawiają się udekorowane drzewa oraz ich funkcje wymierne (przypominające nieco wielomiany Petersena grafów nieskierowanych). Dowód tego rezultatu jest nader złożony, wymaga wielu wyników pośrednich, rozmaitych redukcji, interpretacji, etc.

Rozprawa jest dość dobrze zredagowana, zawiera sporo przykładów, komentarzy, rysunków, dobrze ilustrujących niełatwą miejscami materię. Drobne niedoskonałości (np. używanie frazy "In this paper...") nie wpływają znacząco na przyjemność lektury.

Podsumowując stwierdzam, że praca Mikołaja Marciniaka to bardzo dobry doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących arcyciekawej tematyki powiązanej z wieloma pozornie odległymi światami. Ich uzyskanie świadczy o świetnym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej erudycji autora. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Mikołaja Marciniaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk