

Prof. Tomasz Łuczak  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza  
w Poznaniu

Poznań, dnia 12 września 2023 roku

**Recenzja pracy doktorskiej mgra Mikołaja Marciniaka**  
***Dynamic asymptotic combinatorics***

Rozprawa doktorska mgra Mikołaja Marciniaka dotyczy analizy asymptotycznych własności diagramów Younga i związanych z nimi wielomianów. Badanie diagramów Younga to intrygująca teoretycznie i ważna dla zastosowań gałąź kombinatoryki, wymagająca szerokiej wiedzy z zakresu kombinatoryki, teorii reprezentacji, a w ujęciu prezentowanym w rozprawie, również rachunku prawdopodobieństwa. Diagramy Younga są obiektami kombinatorycznym daleko bardziej złożonymi od np. grafów czy konfiguracji kombinatorycznych i zapewne dlatego grono naukowców publikujących w tej dziedzinie jest stosunkowo wąskie. Niemniej, ze względu na swoje znaczenie, były one obiektem badań tak wybitnych matematyków jak Donald Knuth czy zdobywca Medalu Fieldsa Andrei Okunkow, do wyników których rozprawa nawiązuje. W Polsce tę interesującą tematykę rozwijają między innymi Piotr Śniady, promotor ocenianej rozprawy, i Maciej Dołęga.

Rozprawa składa się z trzech odrębnych części, z których każda zawiera materiał jednego z artykułów współredagowanych przez autora. Dwa z nich zostały już opublikowane w uznanych czasopismach kombinatorycznych, trzeci przygotowany jest do złożenia. Pierwsza część rozprawy dotyczy działania algorytmu Robinsona-Schensteda-Knutha pozwalającego w efektywny sposób zakodować permutację jako parę diagramów Younga o tym samym kształcie. Podstawowym problemem, będącym punktem wyjścia dla tej części rozprawy, jest określenie asymptotycznego kształtu diagramów Younga, gdy wyjściowa permutacja jest permutacją losową, tzn. gdy diagram Younga wybierzemy zgodnie z tzw. rozkładem Plancherela. O tym jak trudne jest to zagadnienie świadczy chociażby fakt, że można je uważać za daleko

idące uogólnienie problemu, postawionego przez Stanisława Ulama w Księdze Szkołkiej dotyczącego rozkładu najdłuższego ciągu rosnącego w losowej permutacji. Asymptotyczny kształt losowego diagramu Younga (z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu) został znaleziony przez Logana i Sheppa, oraz Vershika i Kerova niemal pół wieku temu. Kilka lat temu Romik i Śniady zapoczątkowali badanie rozkładu miejsca, zajmowanego przez ustalony element  $x$  losowej permutacji  $n$  elementowej. Rozprawa kontynuuje ten nurt badań patrząc na położenie ustalonego elementu  $x$  w `dynamiczny' sposób, tzn. patrząc jak zmienia się jego położenie, gdy długość permutacji  $n$  wzrasta. Główny twierdzenie tego rozdziału opisuje asymptotyczną (ze względu na  $n$ ) trajektorię takiego elementu  $x$ . Zarówno wynik jak i jego dowód oferują interesujące nowe podejście do badania zachowania losowych diagramów Younga, choć trzeba wspomnieć, że metody stosowane w tym rozdziale opierają się w dużym stopniu na narzędziach wypracowanych przez Romika i Śniadego.

Zagadnienia poruszane w pozostałych dwóch częściach pracy nie poddają się tak prostemu opisowi. Rozdział drugi bada własności wielomianów Gouldena-Rattana, ściśle związanych ze znanymi wielomianami Kerova. Jego główny wynik, Twierdzenie 2.2.2, dotyczy współczynników tych wielomianów stojących przy wyrazach drugiego rzędu. Punktem wyjścia dla jego dowodu jest twierdzenie Dołęgi, Féraya i Śniadego interpretujące owe współczynniki jako liczby pewnych szczególnych rodzajów grafów, zwanych przez autorów, moim zdaniem nieco myląco, ekspanderami. Korzystając z tego wyniku w rozprawie wyprowadzono zależności między licznościami dwóch klas ekspanderów odpowiadającymi dwóm rodzajom współczynników. Stosowane metody są czysto kombinatoryczne – pokazano jak przekształcić jeden typ ekspanderów w inny używając, technicznie dość wyrafinowanych, transformacji, określanych jako przesunięcia krawędzi.

Trzeci i ostatni rozdział pracy jest najtrudniejszy do przeanalizowania i oceny. Jest on inspirowany Hipotezą 3.2.2, postawioną przez Piotra Śniadego, która w znaczący sposób wzmacnia wyniki przedstawione w pierwszej części rozprawy przewidując dokładne rozkłady asymptotyczne związanych z losowymi diagramami Younga zmiennych losowych. Głównym wynikiem rozdziału jest Twierdzenie 3.3.2, które, zdaniem autorów, stanowi znaczący krok na drodze do udowodnienia Hipotezy 3.2.2. Jego niemal trzydziestostronicowy dowód, korzystający zarówno z

wyrafinowanych technik probabilistycznych jak i technicznych rozważań teorio-grafowych, jest, mimo widocznych wysiłków autora, trudny do ogarnięcia. Wydaje się jednak, że wszystkie jego kroki są poprawne i że wynik ten jest jeszcze jednym świadectwem na znakomite opanowanie przez autora metod i technik stosowanych w teorii losowych diagramów Younga.

To niewątpliwie bardzo dobra rozprawa doktorska. Do jej treści matematycznej nie mam poważniejszych zastrzeżeń. Autor rozprawy wykazał się doskonałą znajomością poruszanych zagadnień, dobrym opanowaniem narzędzi używanych w teorii losowych diagramów Younga i niebanalnymi pomysłami. Natomiast, jak się wydaje, autor mógłby na początku każdego rozumowania przedstawić ideę dowodu i intuicje, które były jego inspiracją. Ułatwiłoby to czytelnikom rozprawy i artykułów, na których jest oparta, podążanie za kolejnymi etapami dowodów, najczęściej długich i bardzo technicznych. Brak komentarzy prezentujących zarys rozumowania autora jest szczególnie dotkliwy w przypadku najbardziej złożonego rozdziału trzeciego. Dodam również, że choć tytuł rozprawy jest bardzo efektowny, wolałbym inny, który wierniej oddawałby jej zawartość.

Rozprawę doktorską magistra Mikołaja Marciniaka oceniam bardzo wysoko. Prezentowane w niej rezultaty i ich dowody wymagały od autora głębokiego wiedzy dotyczącej badanych obiektów i umiejętnego zastosowania zaawansowanych technik dowodowych z rozmaitych dziedzin matematyki. Nie ulega dla mnie wątpliwości, że przedstawiona rozprawa spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania i wnioskuję o dopuszczenie magistra Mikołaja Marciniaka do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania mu stopnia doktora.