Wrocław, 29 maja 2022

dr hab. Bartosz Frej, prof. uczelni
Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

Recenzja osiągnięcia naukowego i pozostałego dorobku w postępowaniu habilitacyjnym dra Adama Kanigowskiego

Opis osiągnięcia

Tematyka osiągnięcia naukowego habilitanta skupia się wokół problemu klasyfikacji układów dynamicznych. Można zaryzykować stwierdzenie, że każda dziedzina matematyki ma swój sposób klasyfikowania obiektów, którymi się zajmuje, czyli właściwe dla niej pojęcie izomorfizmu, często więcej niż jedno. Im bardziej skomplikowane są obiekty tym trudniejsza staje się bezpośrednia weryfikacja izomorfizmu lub braku izomorfizmu między nimi. Dlatego cenna jest znajomość niezmienników izomorfizmów, tzn. własności lub wielkości liczbowych wspólnych dla izomorficznych obiektów. W teorii ergodycznej jednym z najważniejszych niezmienników jest entropia układu dynamicznego bazująca na entropii Shannona wektora probabilistycznego. Wprowadza w szczególności zgrubny podział na trzy klasy: układy o entropii zerowej, układy o entropii dodatniej, ale skończonej i o entropii nieskończonej. O ile w przypadku drugiej z klas możemy mówić o dodatkowym rozwarstwieniu na układy o konkretnej wartości entropii, to dla dwóch pozostałych klas entropia, która w istocie bada wykładniczy wzrost liczby rozróżnialnych orbit, nie daje dodatkowych informacji dotyczących klas równoważności w relacji izomorfizmu. Pewnym lekarstwem w przypadku układów o entropii zero jest badanie w jakim tempie orbity się rozchodzą, jeśli nie jest to tempo wykładnicze, co prowadzi do pojęcia wolnej entropii (*slow entropy*). Tą tematyką zajmuje się habilitant w pracach:

[H1] A. Kanigowski, *Slow entropy for smooth flows on surfaces*, Israel J. Math., 226 (2018), 535–577.

[H2] A. Kanigowski, K. Vinhage, D. Wei, *Slow entropy of some parabolic flows*, Comm. Math. Phys., 370 (2019), 449–474.

Skrótowo opiszę definicję wolnej entropii. Przy ustalonym rozbiciu $\mathcal{P}$ definiuje się odległość Hamminga punktów x i y śledząc orbity tych punktów w skończonym odcinku czasu $[0, T]$ i dzieląc miarę Lebesgue'a zbioru chwil, w których x i y leżą w różnych atomach rozbicia przez długość odcinka czasu T. Gdy obserwujemy ewolucję układu przez czas T z rozdzielczością zadaną przez rozbicie $\mathcal{P}$, liczba rozróżnialnych orbit odpowiada liczbie kul (w odległości Hamminga) o promieniach ϵ pokrywających całą przestrzeń za wyjątkiem ewentualnie zbioru miary ϵ. Wybiera się skalę, tzn. rodzinę (lub ciąg) funkcji $a_\chi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ rozbieżnych do nieskończoności przy $T \to \infty$, przy czym dla coraz dalszych funkcji (większych wartości parametru χ) ucieczka do nieskończoności jest coraz szybsza. Zerowanie się granicy ilorazu liczby kul Hamminga przez wybraną funkcję skali oznacza, że orbity

B.F.

rozbiegają się wolniej niż wskazuje ta funkcja. Aby uzyskać właściwe tempo rozbiegania się orbit maksymalizuje się χ (kres górny), przy którym granica (dolna lub górna) tego ilorazu przy $T \to \infty$ jest wciąż dodatnia. Zbiegając ze średnicą kul ϵ do zera i biorąc kres górny po możliwych rozbiciach otrzymujemy entropię wolną. W szczególności, jest to niezmiennik izomorfizmu. Jako skale można wybierać rozmaite rodziny funkcji o wzroście podwykładniczym, np. funkcje potęgowe.

W pracy [H1] autor zajmuje się głównie potokami Kochergina i potokami Arnol'da. Są to potoki o jednym punkcie stałym, reprezentowalne jako potoki specjalne nad obrotem niewymiernym na torusie $\mathbb{T}$ pod funkcją dachową klasy $C^2(\mathbb{T} \setminus \{0\})$, o określonym tempie ucieczki do nieskończoności w zerze. Dla potoków Kochergina funkcja dachowa zachowuje się w zerze jak $y = x^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$. Potoki takie są więc charakteryzowane przez dwa parametry: kąt obrotu α i wykładnik γ, co uzasadnia oznaczenie ich jako $\mathcal{T}^{\alpha,\gamma}$. Dla potoków Arnol'da osobliwość w zerze jest taka jak dla funkcji $y = -\log x$, jedynym istotnym parametrem jest więc kąt obrotu w podstawie. Główne wyniki pracy dotyczą obliczenia wolnej entropii tych potoków w odpowiednich skalach. Przy pewnych ograniczeniach dotyczących kąta obrotu (które to ograniczenia pozostawiają i tak zbiór miary pełnej) wolna entropia wynosi:

- 1 dla potoku Arnol'da w skali $a_\chi(t) = \chi(\log \chi)^t$,
- $1 + \gamma$ dla potoku Kochergina $\mathcal{T}^{\alpha,\gamma}$ w skali $a_\chi(t) = \chi^t$.

W szczególności wskazuje to na nieizomorficzność potoków Kochergina dla różnych parametrów γ oraz wyklucza oba rodzaje potoków z klasy potoków lokalnej rangi 1. W dowodach używa się metod topologicznych oraz oszacowań opartych na nierówności Denjoya-Koksmy dotyczącej równomiernego rozłożenia orbit obrotu na torusie.

Praca [H2] dotyczy układów pochodzenia algebraicznego: potoków unipotentnych na przestrzeniach jednorodnych. Przestrzeni jednorodne to przestrzenie ilorazowe G/Γ, gdzie G jest grupą Liego, a Γ jej podgrupą dyskretną o skończonej koobjętości. Główne twierdzenie z pracy identyfikuje tempo wzrostu potoku unipotentnego – wielkość wynikającą wprost z algebraicznej struktury elementu unipotentnego zadającego potok – jako wolną entropię (zarówno metryczną jak i topologiczną) tego potoku.

Drugim nurtem badań habilitanta związanym z problemem izomorfizmu są własności relacji równoważności Kakutaniego. To pojęcie słabsze od miarowego izomorizmu układów, produkujące zatem większe klasy abstrakcji. Tej tematyce poświęcone są prace:

[H3] A. Kanigowski, D. Wei, *Product of two Kochergin flows with different exponents is not standard*, Studia Math., 244 (2019), 265–283,

[H4] A. Kanigowski, T. de la Rue, *Product of two staircase rank one transformations that is not loosely Bernoulli*, Journal d'Analyse Math., 143 (2021) , 535–553,

[H5] A. Kanigowski, K. Vinhage, D. Wei, *Kakutani equivalence of unipotent flows*, Duke Math. J., 170 (2021), no. 7, 1517–1583.

Dwa ergodyczne odwracalne układy dynamiczne (X, μ, T), (Y, ν, S) są równoważne w sensie Kakutaniego, gdy istnieją zbiory $A \subset X$, $B \subset Y$, $\mu(A) > 0$, $\nu(B) > 0$, dla których odwozorowania indukowane $T|_A$, $S|_B$ są izomorficzne. W przypadku potoków, czyli

B.G.

układów z czasem ciągłym definiuje się równoważność Kakutaniego używając pojęcia zamiany czasu (Def. 4.3 w autoreferacie). Dla tego pojęcia A. Katok zdefiniował hierarchię określoną przez quasi-porządek: $S \prec T$, gdy istnieje ergodyczny układ będący faktorem T równoważny z S (podobnie dla potoków). W tej hierarchii istnieje klasa stojąca najniżej w tym sensie, że układy z tej klasy są majoryzowane w powyższym sensie przez każdy inny układ ergodyczny. To klasa układów równoważnych z układami Kroneckera, czyli obrotami ergodycznymi zwartej metryzowalnej grupy abelowej (w przypadku potoków – ergodycznymi potokami liniowymi na torusie dwuwymiarowym) znanych jako *loosely Kronecker* albo *loosely Bernoulli o skończonej entropii*, a w oryginalnej terminologii Katoka jako *układy standardowe*.

Prace [H3]–[H5] motywowane są wynikami Mariny Ratner dotyczącymi szczególnych potoków horocykli. W jednej ze swoich prac pokazała ona, że produkt takich potoków nie jest *loosely Bernoulli*, mimo że same potoki są *loosely Bernoulli*. Ten wątek kontynuują prace [H3] i [H4]. Obie mają podobną strukturę i podobny charakter. W pracy [H3] autor zajmuje się znów potokami Kochergina. Wiadomo też, że są to potoki standardowe (czyli *loosely Bernoulli* o entropii zero). Główne twierdzenie z pracy mówi, że dla α_1, α_2 wybranych z pewnego podzbioru torusa $\mathbb{T}$ miary pełnej i dowolnych $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$, przy czym $\gamma_1 \neq \gamma_2$, produkt $\mathcal{T}^{\alpha_1,\gamma_1} \times \mathcal{T}^{\alpha_2,\gamma_2}$ nie jest standardowy. W artykule [H4] zamiast potoków habilitant rozważa układy z czasem dyskretnym, konkretnie układy schodkowe rangi 1. To układy konstruowane na odcinku metodą *cutting and stacking* (cięcia i nadstawiania), w których nad kolejnymi kolumnami nowego podziału wieży na p_n kolumn stawiamy kolejno od 1 do p_n nadstawek (*spacer*ów). Dodatkowe motywacje stanowią tu prace: Ornsteina, Rudolpha i Weissa, którzy skonstruowali przykład układu rangi 1, którego kwadrat kartezjański nie jest *loosely Bernoulli* o entropii zero, oraz Marlies Gerber, która skonstruowała mieszający układ rangi jeden, którego kwadrat kartezjański ma tę własność. Okazuje się, że w klasie układów schodkowych można znaleźć układy, których produkt kartezjański nie jest *loosely Bernoulli* o entropii zero. W tym wypadku nie ma liczbowej charakteryzacji podobnej do pary (α, γ) dla potoków Kochergina, a efekt uzyskuje się odpowiednio manipulując wysokościami wież tworzonych w kolejnych krokach procesu cięcia i nadstawiania. Same dowody są w obu przypadkach dość techniczne, a polegają na analizie rozchodzenia się orbit w sensie metryki $\bar{f}$ względem odpowiednio skonstruowanego skończonego rozbicia.

Obie prace są napisane w podobny sposób. Wpierw autorzy starannie wprowadzają pojęcia, których będą używać i formułują główne twierdzenie oraz wynikające z niego wnioski, a następnie przechodą do dowodu, prowadząc go w sposób, który nazwałbym metodą kolejnych zagłębień. Dzięki temu czytelnik otrzymuje najpierw główną ideę dowodu, a potem jest stopniowo wprowadzany w techniczne detale niezbędne do realizacji tej idei. Przyznam, że bardzo spodobał mi się ten sposób prezentacji wyników. Ze względów dydaktycznych wydaje się znacznie lepszy, niż serwowanie wpierw serii lematów, których przeznaczenie nie jest jeszcze znane, i mam wrażenie, że daje lepszy wgląd w proces pokonywania kolejnych trudności na drodze dochodzenia do wyniku.

Praca [H5] ponownie dotyczy potoków unipotentnych na przestrzeniach jednorodnych. Używając zaproponowanego przez Marinę Ratner niezmiennika Kakutaniego autorzy uzyskują tu szereg wyników dotyczących istnienia potoków *loosely Kronecker* w klasie potoków unipotentnych. W szczególności praca zawiera odpowiedź na pytanie o równoważność potoków unipotentnych postawione przez Ratner. Autorzy dowodzą, że dla $G = SL(d, R)$ istnieje co najmniej $d - 1$ potoków na G/Γ (gdzie Γ jest kozwartą kratą o skończonej ko-

B K

objętości), które są parami nierównoważne. W ogólniejszej sytuacji, zawsze istnieją potoki, które nie są *loosely Kronecker*.

Warto podkreślić, że autoreferat opisujący główne osiągnięcia jest bardzo dobrze napisany i daje wystarczający wgląd w dorobek habilitanta, ukrywając zbędne detale techniczne, ale dając wyobrażenie o używanych metodach. Zgrabnie syntetyzuje on dorobek i ustawia perspektywę, z której widać spójność tematyki mimo różnorodności środowisk w jakich porusza się autor. Osiągnięcie naukowe stanowiące podstawę wniosku oceniam bardzo wysoko.

Pozostały dorobek

Imponująco wygląda dorobek habilitanta, który nie wszedł w skład głównego osiągnięcia. W autoreferacie autor grupuje go w kilka klas tematycznych, wyraźnie pokazując, że zaproponowana tematyka osiągnięcia i zestaw prac mogłyby zostać zmienione bez istotnego uszczerbku dla jakości wniosku. Nie jest zaskoczeniem, że niektóre prace krążą wokół zagadnień będących trzonem głównego osiągnięcia badawczego, wyrastając z zagadnień zgłębianych w pracach Ratner (własność Ratner, teoria sztywności), ale inne obejmują też własności spektralne układów gładkich czy pojęcie rozłączności w sensie Furstenberga. Pośród rozważanych zagadnień i rozwiązanych problemów znajdują się takie, które zostały sformułowane przez twórców wyznaczających główne kierunki rozwoju teorii ergodycznej i układów dynamicznych, takich jak: R. Bowen, A. Katok, V. Rohlin czy J.-P. Thouvenot. Część prac dopiero oczekuje publikacji, ale te, które już się ukazały to kilkaset stron tekstu matematycznego, w tym prace opublikowane w takich czasopismach jak Inventiones Mathematicae, czy wiodące w tej dziedzinie ETDS i DCDS. Warto zwrócić też uwagę na fakt, że tak w składzie osiągnięcia jak i w pozostałym wykazanym dorobku znajdują się i prace samodzielne autora, i pisane w kolaboracji z naukowcami znajdującymi się na różnych etapach swojej kariery naukowej. W każdym z przypadków prace są publikowane w dobrych lub bardzo dobrych czasopismach.

Habilitant rozpowszechnia swoje osiągnięcia aktywnie uczestnicząc w konferencjach i warsztatach z teorii ergodycznej i układów dynamicznych. W autoreferacie wykazuje ponad 30 wystąpień konferencyjnych, głównie (ale nie wyłącznie) w Stanach Zjednoczonych i w Polsce.

Aktywność dydaktyczna i organizacyjna

Habilitant nie stroni od obowiązków organizacyjnych. W autoreferacie podaje, że był członkiem czterech komitetów organizacyjnych dla konferencji lub seminariów dotyczących układów dynamicznych. Znakomicie wygląda jego działalność dydaktyczna, zwłaszcza w kwestii kształcenia i doskonalenia umiejętności młodych matematyków (doktoranci, uczestnicy postdoków). Współpraca ta (habilitant wykazał tu pięć osób) jest skuteczna, co jest udokumentowane wspólnymi publikacjami i owocuje dalszymi wyróżnieniami dla podopiecznych (np. otrzymanie stażu podoktorskiego na uniwersytecie w Jerozolimie pod kierownictwem E.Lindenstraussa). Pośród prowadzonych przez niego kursów znajdują się zarówno przedmioty podstawowe (*Calculus*), jak i specjalistyczne, jak te dotyczące teorii ergodycznej. Tę część jego działalności również oceniam wysoko.

B.G.

Podsumowanie i konkluzja

Przedłożona przez habilitanta propozycja wypełnia, w mojej opinii z nadmiarem, wymagania ustawowe dotyczące uzyskania stopnia doktora habilitowanego. Habilitant przedstawił cykl połączonych tematycznie publikacji, stanowiących istotny wkład w rozwój teorii układów dynamicznych. Ponadto należy jednoznacznie stwierdzić, że wykazuje się znaczną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni – po ukończeniu studiów doktorskich w IMPAN, odbył staż podoktorski na Uniwersytecie Stanu Pensylwania, a obecnie pracuje na Uniwersytecie w Marylandzie.

W związku z powyższym, z przekonaniem i z przyjemnością popieram wniosek o nadanie panu dr. Adamowi Kanigowskiemu stopnia doktora habilitowanego.

Bartosz Frej

B. Frej